Алгебра и анализ
Том 18 (2006), №6

СИСТЕМЫ ДИАГРАММНЫХ КАТЕГОРИЙ И K-ТЕОРИЯ. I

© Г. ГАРКУША

Всякой левой системе диаграммных категорий и всякому левому выделенному дериватору сопоставляется пространство K-теории. Эта K-теория — канонически бесконечнократное пространство петель и имеет много общих свойств с K-теорией Вальдхаузена. Доказана ослабленная теорема аддитивности, а также, что K-теория Квиллена для широкого семейства точных категорий, включающего абелевы категории, является ретрактом K-теории ассоциированного дериватора.

Введение

Понятие дериватора было введено Гротендиком в [1, 2]. Независимо от Гротендика аналогичные конструкции были исследованы Хеллером [3], Келлером [4] и Франке [5] (так называемые системы диаграммных категорий). Основываясь на работах Гротендика [2] и Франке [5], Малциниотис [6] вводит понятие триангулированного дериватора $\mathbf{D}$, а затем (совместно с Келлером) строит пространство K-теории $K(\mathbf{D})$ для $\mathbf{D}$. В своей работе по K-теории триангулированных дериваторов [7] Малциниотис формулирует три гипотезы. Цель настоящей работы — дать частичные положительные ответы к гипотезам аддитивности и сравнения.

Стоит отметить, что мы не ограничиваемся только триангулированными дериваторами, а работаем с K-теорией $K(\mathbf{B})$ более общих объектов $\mathbf{B}$ таких, как левая система диаграммных категорий или левый выделенный дериватор. Имеется множество таких объектов на практике.

Мы сначала определяем $S.$-конструкцию для таких $\mathbf{B}$, и затем пространство K-теории $K(\mathbf{B})$ как пространство петель для $|i.S.\mathbf{B}|$, где $iS_n\mathbf{B}$ — подкатегория изоморфизмов в каждой категории $S_n\mathbf{B}$, $n \geqslant 0$. Пространство

Ключевые слова: системы диаграммных категорий, дериваторы Гротендика, алгебраическая K-теория.

Поддержано исследовательской стипендией ICTP.

$K(\mathbf{B})$ — канонически бесконечнократное пространство петель по машине Сегала [8]. По аналогии с K-теорией Вальдхаузена [9] из теоремы аддитивности следует, что можно также рассматривать $K(\mathbf{B})$ в терминах следующего связного Ω-спектра. Именно, он задается последовательностью пространств

$$\Omega|i.S.\mathbf{B}|, \Omega|i.S.S.\mathbf{B}|, \ldots, \Omega|i.S.^n\mathbf{B}|, \ldots,$$

в которой мультисимплициальные объекты $i.S.^n\mathbf{B}$, $n \geqslant 1$, получены путем итерирования $S.$-конструкции. Хотя гипотеза о теореме аддитивности остается открытой в общем случае (см. также [7, гипотеза 3]), ее ослабленная форма верна.

Теорема 6.5. *Теорема аддитивности верна для пространства*

$$\Omega^\infty|i.S.^\infty\mathbf{B}| = \lim_n \Omega^n|i.S.^n\mathbf{B}|.$$

На самом деле, эта теорема доказана при некоторых дополнительных естественных ограничениях (см. ниже).

Со всею полнотою теорема аддитивности доказана в [10] для комплициальных дериваторов. Совсем недавно Сизинский и Нееман объявили справедливость теоремы аддитивности для триангулированных дериваторов [11].

Обозначим через $\mathbf{D}^b(\mathcal{E})$ дериватор, который определяется гиперфунктором $I \mapsto D^b(\mathcal{E}^I)$, где $D^b(\mathcal{E}^I)$ — производная категория точной категории функторов $\mathcal{E}^I$. Можно также получить некоторое соотношение K-теорий Квиллена $K(\mathcal{E})$ и $K(\mathbf{D}^b(\mathcal{E}))$ для широкого семейства точных категорий, включающего абелевы категории.

Теорема 7.1. *Пусть $\mathcal{E}$ — замкнутая относительно расширений, полная точная подкатегория абелевой категории $\mathcal{A}$, удовлетворяющая условиям теоремы о резольвенте. То есть*

(1) *если $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ точна в $\mathcal{A}$ и $M, M'' \in \mathcal{E}$, то $M' \in \mathcal{E}$ и*

(2) *для всякого объекта $M \in \mathcal{A}$ имеется конечная резольвента $0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$, где $P_i \in \mathcal{E}$.*

Тогда естественное отображение $K(\rho) : K(\mathcal{E}) \to K(\mathbf{D}^b(\mathcal{E}))$ — гомотопически расщепляющееся включение, т.е. существует отображение $p : K(\mathbf{D}^b(\mathcal{E})) \to K(\mathcal{E})$ такое, что $p \circ K(\rho)$ гомотопно единице. В частности, каждая K-группа $K_n(\mathcal{E})$ — прямое слагаемое $K_n(\mathbf{D}^b(\mathcal{E}))$.

Теорема 7.1 дает частичный положительный ответ к гипотезе сравнения Малциниотиса. Она также показывает, что K-теория дериваторов имеет весьма непростую природу.

Я весьма благодарен Дэнису-Чарльзу Сизинскому и Амнону Нееману за ряд плодотворных бесед, а также А. И. Генералову, внимательно прочитавшему рукопись статьи.

§1. Системы диаграммных категорий

В этом параграфе читатель столкнется с категорными формальностями и определениями понятий. Ряд аналогичных утверждений этого параграфа приведены также в [5]. Мы следуем здесь первоначальной терминологии Франке [5].

1.1. Обозначения. Пусть I — категория. Для подкатегории J категории I и $x \in I$ через J/x обозначим следующую комма-категорию. Объекты суть пары (y, φ), где $y \in J$ и $\varphi : y \to x$ — морфизм в I. Морфизмы из (y, φ) в (y', φ') задаются морфизмами $\psi : y \to y'$ в J такими, что $\varphi = \varphi'\psi$. Категория $J \setminus x$ состоит из пар (y, φ), где $y \in J$ и $\varphi : x \to y$. Морфизмы определяются по аналогии с J/x. Если $K \subseteq \operatorname{Ob} I$ — подкласс объектов, через $I - K$ будем обозначать полную подкатегорию I с классом объектов $I - K$. В частности, если $K = \{x\}$ имеет один объект, обозначим эту подкатегорию также через $I - x$. Если $f : J \to I$ — функтор, категории f/x и $f \setminus x$ состоят из объектов $(y \in J, \varphi : f(y) \to x)$ и $(y \in J, \varphi : x \to f(y))$. Если f — включение подкатегории, они суть то же самое, что J/x и $J \setminus x$.

Для неотрицательного n через Δ^n обозначим упорядоченное множество $\{0 < 1 < \cdots < n\}$. Для $i \leqslant n+1$ отображение $d_i : \Delta^n \to \Delta^{n+1}$ — монотонная инъекция, не содержащая i в своем образе, и $s_i : \Delta^n \to \Delta^{n-1}$ — монотонная сюръекция, удовлетворяющая условию $s_i(i) = s_i(i+1)$.

1.2. Аксиомы. Понятия 2-категории и 2-функтора читатель может прочесть в [12]. Далее мы используем аббревиатуру „ч.у.м.“ для конечных частично упорядоченных множеств. Каждое ч.у.м. может быть рассмотрено как категория, в которой $\operatorname{Hom}(x, y)$ имеет в точности один элемент $x \leqslant y$, и пусто в противном случае. 2-категорию всех ч.у.м. (соответственно конечных категорий без циклов) обозначим через Ord (соответственно Dirf).

Пусть Dia — полная 2-подкатегория 2-категории $\mathbf{Cat}$ малых категорий, содержащая 2-категорию Ord. Далее всюду предполагается, что Dia отвечает таким условиям:

(1) Dia замкнута относительно конечных произведений и копроизведений;
(2) для всякого функтора $f : I \to J$ в Dia и всякого объекта y из J, категории f/y и $f \setminus y$ принадлежат Dia.

Мы также назовем Dia *категорией диаграмм*.

Если $I \in \mathrm{Dia}$, под $I^\star$ понимается категория I с добавленным начальным и конечным объектом $\star$. Для всяких x и y из I имеется единственный морфизм $x \to y$ в $I^\star$, который пропускается через $\star$. Этот морфизм назовем нулевым. Если $I \in \mathrm{Ord}$ и $x \leqslant y$, в $I^\star$ имеется один дополнительный морфизм из x в y. Композиция определяется очевидным образом. Пусть $\mathrm{Dia}^\star$ — 2-подкатегория 2-категории $\mathbf{Cat}$, чьи объекты суть те же, что и в Dia, и чьи горизонтальные морфизмы $I \to J$ заданы функторами $I^\star \to J^\star$, отображающими $\star$ в $\star$, и пусть биморфизмы — естественные преобразования функторов из $I^\star$ в $J^\star$. Заметим, что каждый морфизм $f : I \to J$ из Dia продолжается естественным образом до морфизма $f^\star : I \to J$ из $\mathrm{Dia}^\star$: $f^\star(I) = f(I), f^\star(\star) := \star$.

Предсистема диаграммных категорий с областью Dia или просто *предсистема диаграммных категорий* — это функтор

$$\mathbf{C} : \mathrm{Dia}^{\star\mathrm{op}} \to \mathbf{CAT} \tag{1}$$

из $\mathrm{Dia}^\star$ в категорию категорий $\mathbf{CAT}$ (не обязательно малых), удовлетворяющий аксиоме функториальности, приведенной ниже. Итак, каждой категории I из $\mathrm{Dia}^\star$ соответствует категория $\mathbf{C}_I$ и каждому функтору $f : I \to J$ в $\mathrm{Dia}^\star$ — функтор $f^* = \mathbf{C}(f) : \mathbf{C}_J \to \mathbf{C}_I$.

Аксиома функториальности. Выполнены следующие условия:

(а) каждому естественному преобразованию $\varphi : f \to g$ соответствует естественное преобразование $\varphi^* : f^* \to g^*$, а отображения $f \to f^*$ и $\varphi \to \varphi^*$ задают функтор из $\mathrm{Hom}(I, J)$ в категорию функторов из $\mathbf{C}_J$ в $\mathbf{C}_I$;

(б) если

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] & I \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "g'"'] & J \arrow[r, "h"] & L \end{tikzcd}$$

— морфизмы и $\varphi : g \to g'$ — биморфизм, то $f^* \circ \varphi^* = (\varphi \circ f)^*$ и $\varphi^* \circ h^* = (h \circ \varphi)^*$.

Отныне зафиксируем категорию диаграмм Dia. С каждой категорией $\mathcal{C}$ ассоциируется предсистема диаграммных категорий, переводящая категорию I из $\mathrm{Dia}^\star$ в категорию функторов

$$\mathcal{C}^{I^\star} = \mathrm{Hom}(I^\star, \mathcal{C}),$$

и отображение $f : I \to J$ — в отображение

$$f^* : \mathcal{C}^{J^\star} \to \mathcal{C}^{I^\star}, \quad X \mapsto X \circ f.$$

Морфизм $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ двух предсистем диаграммных категорий $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ состоит из следующих данных:

(1) для всякого $I \in \mathrm{Dia}^\star$ задан функтор $F : \mathbf{C}_I \to \mathbf{C}'_I$;

(2) для всякого отображения $f : I \to J$ в $\mathrm{Dia}^\star$ имеется изоморфизм функторов $\iota_{F,f} : f^*F \xrightarrow{\sim} Ff^*$.

При этом для $\iota_{F,f}$ должны быть также выполнены следующие условия:
(а) для всякого $I \in \mathrm{Dia}^\star$, $\iota_{F,1_I} = 1_F$;
(б) для всяких двух отображений $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} K$ в $\mathrm{Dia}^\star$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} f^*g^*F \arrow[rr, "\iota_{F,gf}"] \arrow[dr, "f^*\iota_{F,g}"'] & & Ff^*g^* \\ & f^*Fg^* \arrow[ur, "\iota_{F,f}g^*"'] & \end{tikzcd}$$

является коммутативной;
(в) для всякого биморфизма $\varphi : f \to g$ в $\mathrm{Dia}^\star$ имеем следующий коммутативный квадрат:

$$\begin{tikzcd} f^*F \arrow[r, "\iota_{F,f}"] \arrow[d, "\varphi^*F"'] & Ff^* \arrow[d, "F\varphi^*"] \\ g^*F \arrow[r, "\iota_{F,g}"'] & Fg^*. \end{tikzcd}$$

Морфизм $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ является *эквивалентностью*, если для любого $I \in \mathrm{Dia}^\star$ функтор $F : \mathbf{C}_I \to \mathbf{C}'_I$ — эквивалентность категорий.

Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ — предсистемы диаграммных категорий. *Расслоенное произведение* пары морфизмов $F : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ и $G : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ состоит из

(а) для любого $I \in \mathrm{Dia}^\star$ имеем категорию $\prod(F,G)_I$, чьи объекты суть тройки

$$(A, c, B), \quad A \in \mathbf{A}_I,\ \ B \in \mathbf{B}_I,\ \ c : F(A) \xrightarrow{\sim} G(B),$$

и где морфизм из (A, c, B) в (A', c', B') — это пара морфизмов (a, b), согласованная с изоморфизмами c и c';

(б) для любого функтора $f : I \to J$ в $\mathrm{Dia}^\star$ имеем функтор

$$f^* = f^*_{\prod(F,G)} : \prod(F,G)_J \to \prod(F,G)_I,$$

определенный как

$$(A, c, B) \mapsto (f^*_{\mathbf{A}}(A), \iota_{G,f} \circ f^*_{\mathbf{C}}(c) \circ \iota^{-1}_{F,f}, f^*_{\mathbf{B}}(B)).$$

Предложение 1.1. *Указанные выше данные определяют предсистему диаграммных категорий*

$$\prod(F,G) : \mathrm{Dia}^{\star op} \to \mathbf{CAT}. \tag{2}$$

Доказательство. Покажем, что (2) — функтор. Для этого рассмотрим два разложимых функтора $I \xrightarrow{g} J \xrightarrow{f} K$ в $\mathrm{Dia}^\star$. Имеем

$$\iota_{G,g} f^* \circ g^*(\iota_{G,f} f^*(c) \iota_{F,f}^{-1}) \circ \iota_{F,g}^{-1} f^*$$

$$= \underbrace{\iota_{G,g} f^* \circ g^*(\iota_{G,f})}_{\iota_{G,fg}} \circ g^*(f^*(c)) \circ \overbrace{g^*(\iota_{F,f}^{-1}) \circ \iota_{F,g}^{-1} f^*}^{\iota_{F,fg}^{-1}} = \iota_{G,fg}(fg)^*(c)\iota_{F,fg}^{-1}.$$

Следовательно, $(fg)^* = g^* f^* : \prod(F,G)_K \to \prod(F,G)_I$.

Так как диаграмма

$$\begin{tikzcd}
Ff^*(A) \arrow[r, "\iota_{F,f}^{-1}"] \arrow[d, "F\varphi^*"'] & f^*F(A) \arrow[r, "f^*(c)"] \arrow[d, "\varphi^* F"'] & f^*G(B) \arrow[r, "\iota_{G,f}"] \arrow[d, "\varphi^* G"] & Gf^*(B) \arrow[d, "G\varphi^*"] \\
Fg^*(A) \arrow[r, "\iota_{F,g}^{-1}"'] & g^*F(A) \arrow[r, "g^*(c)"'] & g^*G(B) \arrow[r, "\iota_{G,g}"'] & Gg^*(B)
\end{tikzcd}$$

коммутативна для любых функторов $f, g : I \to J$ и любого бифунктора $\varphi : f \to g$ в $\mathrm{Dia}^\star$, отображение

$$(f^*(A), \iota_{G,f} f^*(c) \iota_{F,f}^{-1}, f^*(B)) \mapsto (g^*(A), \iota_{G,g} g^*(c) \iota_{F,g}^{-1}, g^*(B))$$

задает отображение φ^* между $f^*, g^* : \prod(F,G)_J \to \prod(F,G)_I$. Аксиома функториальности проверяется непосредственно. $\bullet$

Пусть $\Delta^n = \{0 < \cdots < n\} \in \mathrm{Dia}$. Если нет опасности разночтения, Δ^0 обозначаем также через 0. Если $I \in \mathrm{Dia}$ и $x \in I$, пусть $i_{x,I} : 0 \to I$ — функтор, отображающий 0 в x. Для $A \in \mathbf{C}_I$ положим $A_x = i_{x,I}^* A$.

Если $I \in \mathrm{Dia}$, имеется естественный функтор

$$\mathrm{dia}_I : \mathbf{C}_I \to \mathrm{Hom}(I, \mathbf{C}_0).$$

Он строится таким образом. Для любого $x \in I$ полагаем $\mathrm{dia}_I(B)(x) = B_x$. Каждый морфизм $\alpha : x \to y$ в I задает естественное преобразование $\alpha : i_{x,I} \to i_{y,I}$. Тогда $\mathrm{dia}_I(B)(\alpha) := \alpha^* : B_x \to B_y$.

Ниже мы рассмотрим следующие аксиомы.

Аксиома об изоморфизмах. Морфизм $f : A \to B$ в $\mathbf{C}_I$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\mathrm{dia}_I(f)$ — изоморфизм в $\mathrm{Hom}(I, \mathbf{C}_0)$. Иными словами, он изоморфизм тогда и только тогда, когда $f_x : A_x \to B_x$ — изоморфизм для всех $x \in I$.

Аксиома дизъюнктного объединения. (а) Если $I = I_1 \coprod I_2$ — дизъюнктное объединение полных подкатегорий I_1 и I_2, то соответствующие включения i_1, i_2 подкатегорий I_1, I_2 в I определяют эквивалентность категорий

$$(i_1^*, i_2^*) : \mathbf{C}_I \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}_{I_1} \times \mathbf{C}_{I_2}.$$

(б) $\mathbf{C}_\varnothing$ — тривиальная категория, имеющая в точности один морфизм между любыми двумя объектами.

Аксиомы гомотопических расширений Кана. Левая аксиома гомотопических расширений Кана требует, чтобы для каждого функтора $f : I \to J$ функтор $f^* : \mathbf{C}_J \to \mathbf{C}_I$ обладал левым сопряженным $f_! : \mathbf{C}_I \to \mathbf{C}_J$. По симметрии правая аксиома гомотопических расширений Кана говорит, что f^* имеет правый сопряженный $f_* : \mathbf{C}_I \to \mathbf{C}_J$. Функторы $f_!$ и f_* будем называть левыми и правыми гомотопическими расширениями Кана соответственно.

В случае, когда $f : I^\star \to 0^\star$ индуцируется единственным функтором $I \to 0$, будем писать $\underrightarrow{\mathrm{Holim}}_I$ для $f_!$ и $\underleftarrow{\mathrm{Holim}}_I$ для f_*.

Лемма 1.2. *Пусть (f, g) — пара сопряженных функторов в* $\mathrm{Dia}^\star$ *и пусть $\varphi : fg \to 1, \psi : 1 \to gf$ — морфизмы сопряженности. Тогда (g^*, f^*) — пара сопряженных функторов и $\varphi^* : g^* f^* \to 1, \psi^* : 1 \to f^* g^*$ — морфизмы сопряженности.*

Доказательство. Очевидно. •

Определение. Функтор (1) называем *левой* (*соответственно правой*) *системой диаграммных категорий*, если выполнена аксиома функториальности, аксиома об изоморфизмах, аксиома дизъюнктного объединения и левая (соответственно правая) аксиома гомотопических расширений Кана.

Всюду ниже называем левую и правую системы диаграммных категорий *бисистемой диаграммных категорий*.

Пример. Пусть $\mathcal{C}$ — замкнутая модельная категория и $I \in \mathrm{Dirf}$. Существует естественная структура замкнутой модельной категории для $\mathcal{C}^I$ (см. [5]). Предположим также, что $\mathcal{C}$ имеет нуль-объект. Через $\mathrm{Ho}\,\mathcal{C}^I$ обозначим гомотопическую категорию, полученную путем обращения слабых эквивалентностей. Имеется канонический функтор $\mathcal{C}^I \to \mathcal{C}^{I^\star}$, расширяющий I-диаграмму до $I^\star$. Он посылает нуль-объект и морфизмы из $I^\star$ в нуль-объект и морфизмы в $\mathcal{C}$. Всякий функтор $f : I^\star \to J^\star$ определяет таким образом функтор $f^* : \mathcal{C}^J \to \mathcal{C}^I$. Он сохраняет слабые эквивалентности, а значит, задает функтор между гомотопическими категориями. Из [5, 1.3.2] следует, что функтор

$$I \in \mathrm{Dirf} \mapsto \mathrm{Ho}\,\mathcal{C}^{\mathrm{I}}$$

определяет бисистему диаграммных категорий с областью Dirf.

Для произвольной модельной категории $\mathcal{C}$ пусть $\mathcal{C}_*$ обозначает модельную категорию объектов под конечным объектом $*$ (см. [13, с. 4]). Тогда $\mathcal{C}_*$ является выделенной категорией (с выделенным нуль-объектом). Ее бисистема диаграммных категорий с областью Dirf — это, по определению, бисистема, ассоциированная с $\mathcal{C}_*$.

Рассмотрим морфизм $F : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ левых систем диаграммных категорий $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$, и пусть $f : I \to J$ — функтор в $\mathrm{Dia}^\star$. Рассмотрим морфизмы сопряженности

$$\alpha : 1 \longrightarrow f^* f_! \quad \text{и} \quad \beta : f_! f^* \longrightarrow 1.$$

Обозначим через $\gamma_{F,f}$ композицию

$$f_! F \xrightarrow{f_! F\alpha} f_! F f^* f_! \xrightarrow{f_! \iota_{F,f}^{-1} f_!} f_! f^* F f_! \xrightarrow{\beta F f_!} F f_!.$$

Говорим, что F *точен справа*, если $\gamma_{F,f}$ — изоморфизм и если выполнены такие условия согласованности:

$$F\alpha_{\mathbf{A}} = \iota_{F,f} f_! \circ f^*(\gamma_{F,f}) \circ \alpha_{\mathbf{C}} F \quad \text{и} \quad F\beta_{\mathbf{A}} = \beta_{\mathbf{C}} F \circ f_!(\iota_{F,f}^{-1}) \circ \gamma_{F,f}^{-1} f^*. \qquad (3)$$

То есть $F\alpha_{\mathbf{A}}$ является композицией

$$F \xrightarrow{\alpha_{\mathbf{C}} F} f^* f_! F \xrightarrow{f^*(\gamma_{F,f})} f^* F f_! \xrightarrow{\iota_{F,f} f_!} F f^* f_!$$

и $F\beta_{\mathbf{A}}$ является композицией

$$F f_! f^* \xrightarrow{\gamma_{F,f}^{-1} f^*} f_! F f^* \xrightarrow{f_!(\iota_{F,f}^{-1})} f_! f^* F \xrightarrow{\beta_{\mathbf{C}} F} F.$$

Понятие точного слева (соответственно точного) морфизма между двумя правыми системами диаграммных категорий (соответственно бисистемами диаграммных категорий) определяется аналогично.

Предложение 1.3. *Пусть* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ *и* $G : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *— точные справа* (*соответственно точные слева*) *морфизмы левых систем диаграммных категорий* (*соответственно правых систем диаграммных категорий*). *Тогда расслоенное произведение* $\prod(F,G)$ *является левой системой диаграммных категорий* (*соответственно правой системой диаграммных категорий*).

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для левых систем диаграммных категорий. По предложению 1.1 $\prod(F,G)$ — предсистема диаграммных категорий. Очевидно, она удовлетворяет как аксиоме об изоморфизмах, так и аксиоме о дизъюнктном объединении. Поэтому требуется проверить аксиому гомотопических расширений Кана.

Пусть $f : I \to J$ — функтор в $\mathrm{Dia}^\star$. Определим функтор

$$f_! : \prod(F,G)_I \to \prod(F,G)_J$$

по правилу: $(A, c, B) \mapsto (f_!(A), \gamma_{G,f} f_!(c)\gamma_{F,f}^{-1}, f_!(B))$. Тогда морфизмы сопряженности $\alpha_{\mathbf{A},\mathbf{B}} : 1 \to f^* f_!$ и $\beta_{\mathbf{A},\mathbf{B}} : f_! f^* \to 1$ задают морфизмы сопряженности для $\prod(F, G)$. Чтобы проверить это, требуется показать, что коммутативны квадраты

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "c"] \arrow[d, "F\alpha_{\mathbf{A}}"'] & GB \arrow[d, "G\alpha_{\mathbf{B}}"] \\ Ff^* f_! A \arrow[r, "c'"'] & Gf^* f_! B, \end{tikzcd}$$

где $c' = \iota_{G,f} f_! \circ f^*(\gamma_{G,f}) \circ f^* f_!(c) \circ f^*(\gamma_{F,f}^{-1}) \circ \iota_{F,f}^{-1} f_!$, и

$$\begin{tikzcd} Ff_! f^* A \arrow[r, "c''"] \arrow[d, "F\beta_{\mathbf{A}}"'] & Gf_! f^* B \arrow[d, "G\beta_{\mathbf{B}}"] \\ FA \arrow[r, "c"'] & GB, \end{tikzcd}$$

где $c'' = \gamma_{G,f} f^* \circ f_!(\iota_{G,f}) \circ f_! f^*(c) \circ f_!(\iota_{F,f}^{-1}) \circ \gamma_{F,f}^{-1} f^*$.

Имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "c"] \arrow[d, "\alpha_{\mathbf{C}} F"'] & GB \arrow[d, "\alpha_{\mathbf{C}} G"] \\ f^* f_! FA \arrow[r, "f^* f_!(c)"] \arrow[d, "\iota_{F,f} f_! \circ f^*(\gamma_{F,f})"'] & f^* f_! GB \arrow[d, "\iota_{G,f} f_! \circ f^*(\gamma_{G,f})"] \\ Ff^* f_! A \arrow[r, "c'"'] & Gf^* f_! B. \end{tikzcd}$$

Ввиду (3) получаем

$$\begin{aligned} G\alpha_{\mathbf{B}} \circ c &= \iota_{G,f} f_! \circ f^*(\gamma_{G,f}) \circ \alpha_{\mathbf{C}} G \circ c = \iota_{G,f} f_! \circ f^*(\gamma_{G,f}) \circ f^* f_!(c) \circ \alpha_{\mathbf{C}} F \\ &= \iota_{G,f} f_! \circ f^*(\gamma_{G,f}) \circ f^* f_!(c) \circ f^*(\gamma_{F,f}^{-1}) \circ \iota_{F,f}^{-1} f_! \circ F\alpha_{\mathbf{A}} = c' \circ F\alpha_{\mathbf{A}}. \end{aligned}$$

Поэтому первый квадрат коммутативен. Коммутативность второго квадрата доказывается аналогично. Непосредственно проверяется, что следующие композиции суть единицы (для $f^*_{\prod(F,G)}$ соответственно $f_{!\,\prod(F,G)}$):

$$f^* \xrightarrow{\alpha f^*} f^* f_! f^* \xrightarrow{f^* \beta} f^*, \quad f_! \xrightarrow{f_! \alpha} f_! f^* f_! \xrightarrow{\beta f_!} f_!.$$

Отсюда следует аксиома гомотопических расширений Кана. •

1.3. Следствия из аксиом. В этом разделе мы обсудим следствия из аксиом. Мы также отсылаем читателя к работе Франке [5].

1.3.1. Свойства функторов гомотопических расширений Кана. Функтор $f : I \to J$ в Dia — *замкнутая* (*открытая*) *иммерсия*, если он вполне унивалентное включение такое, что для всякого $x \in J$ соотношение $\mathrm{Hom}(I, x) \neq \varnothing$ ($\mathrm{Hom}(x, I) \neq \varnothing$) влечет $x \in I$. Очевидно следующее утверждение.

Лемма об иммерсии. *Пусть функтор $f : I \to J$ в Dia — замкнутая* (*открытая*) *иммерсия. Тогда функтор $g : J^\star \to I^\star$, переводящий $j \in J$ в j, если $j \in I$, и в $\star$, в противном случае, является правым* (*левым*) *сопряженным к $f^\star$.*

Предложение 1.4. *Пусть $\mathbf{C}$ — левая система диаграммных категорий, $f : I \to J$ — функтор, $x \in J$, и пусть $i_x : J/x \to J, j_x : f/x \to I, l : f/x \to J/x$ — канонические функторы. Если J — ч.у.м., то для $A \in \mathbf{C}_I$ имеются следующие изоморфизмы*:

$$(f_! A)_x \simeq \underrightarrow{\mathrm{Holim}}_{J/x} i_x^* f_! A \simeq \underrightarrow{\mathrm{Holim}}_{J/x} l_! j_x^* A \simeq \underrightarrow{\mathrm{Holim}}_{f/x} j_x^* A.$$

Если $\mathbf{C}$ — правая система диаграммных категорий, то двойственное утверждение выполнено для проективных гомотопических пределов и для правых гомотопических расширений Кана.

Доказательство. Доказательство проводится аналогично [5, 1.4.2]. •

Если f — включение полной подкатегории $I \subseteq J$, где J — ч.у.м., для каждого объекта $x \in I$ категория f/x имеет конечный объект (x, id_x). Поэтому выполнено следующее

Следствие 1.5. *Пусть $\mathbf{C}$ — левая* (*соответственно правая*) *система диаграммных категорий и пусть $f : I \to J$ — включение полной подкатегории, где J — ч.у.м. Тогда канонический в $\mathbf{C}_I$ морфизм $A \to f^* f_! A$* (*соответственно $f^* f_* A \to A$*) *— изоморфизм для любого объекта $A \in \mathbf{C}_I$.*

Предложение 1.4 часто используется, чтобы свести утверждения о функторах $f_!$ и f_* к подобным утверждениям о $\underrightarrow{\mathrm{Holim}}_J$ и $\underleftarrow{\mathrm{Holim}}_J$. Следующее предложение относится к вопросу о замене J меньшей категорией.

Предложение 1.6. *Пусть $\mathbf{C}$ — левая система диаграммных категорий, $i : I^\star \to J^\star$ — некоторый функтор* (*как правило, включение подкатегории*)*. Если i имеет левый сопряженный вида $l^\star$, где $l : J \to I$, то $\underrightarrow{\mathrm{Holim}}_J A \simeq \underrightarrow{\mathrm{Holim}}_I i^* A$. Двойственно, допустим, что $\mathbf{C}$ — правая система диаграммных категорий. Если i имеет правый сопряженный вида $r^\star$ для некоторого функтора $r : J \to I$, то $\underleftarrow{\mathrm{Holim}}_J A \simeq \underleftarrow{\mathrm{Holim}}_I i^* A$.*

Доказательство. (1) Пусть l сопряжен слева к i. Тогда $l_!$ естественно изоморфен i^*. Следовательно, $\underrightarrow{\mathrm{Holim}}_J = \underrightarrow{\mathrm{Holim}}_I \circ l_! \simeq \underrightarrow{\mathrm{Holim}}_I \circ i^*$. •

1.3.2. Декартовы квадраты. Пусть $\square \in \mathrm{Dia}$ — ч.у.м. $\Delta^1 \times \Delta^1$, имеющий следующие элементы:

$$\begin{tikzcd}
(0,0) \arrow[r] \arrow[d] & (0,1) \arrow[d] \\
(1,0) \arrow[r] & (1,1),
\end{tikzcd}$$

где $\to$ означает $<$. Пусть подкатегория $\ulcorner \subset \square$ получена путем удаления нижнего правого угла $(1,1)$ и пусть $\lrcorner \subset \square$ — подкатегория, содержащая все элементы $\square$, кроме $(0,0)$. Пусть $i_\ulcorner : \ulcorner \to \square$ и $i_\lrcorner : \lrcorner \to \square$ — включения, и $\mathbf{C}$ — правая система диаграммных категорий (соответственно левая система диаграммных категорий). Объект $A \in \mathbf{C}_\square$ называется *декартовым* (соответственно *кодекартовым*), если канонический морфизм $A \to i_{\lrcorner *} i_\lrcorner^* A$ — изоморфизм (соответственно если $i_{\ulcorner !} i_\ulcorner^* A \to A$ — изоморфизм).

Лемма 1.7. *Пусть* $\mathbf{C}$ *— левая система диаграммных категорий. Объект* $A \in \mathbf{C}_\square$ *кодекартов тогда и только тогда, когда* $A_{(1,1)} \simeq \underrightarrow{\mathrm{Holim}}_\ulcorner i_\ulcorner^* A$. *Двойственно, если* $\mathbf{C}$ *— правая система диаграммных категорий, то объект* $A \in \mathbf{C}_\square$ *декартов тогда и только тогда, когда* $A_{(0,0)} \simeq \underleftarrow{\mathrm{Holim}}_\lrcorner i_\lrcorner^* A$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $\mathbf{C}$ — левая система диаграммных категорий. Если A — объект $\mathbf{C}_\square$, по следствию 1.5 естественный морфизм

$$i_\ulcorner^* A \to i_\ulcorner^* i_{\ulcorner !} i_\ulcorner^* A$$

является изоморфизмом. Поэтому $A_{(i,j)} \simeq i_{\ulcorner !} i_\ulcorner^* A_{(i,j)}$, если $(i,j) \in \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$.

Из предложения 1.4 вытекает, что $i_{\ulcorner !} i_\ulcorner^* A_{(1,1)} \simeq \underrightarrow{\mathrm{Holim}}_\ulcorner i_\ulcorner^* A$, откуда немедленно следует наше утверждение. $\bullet$

Отныне все левые или правые системы диаграммных категорий предполагаются системами с областью $\mathrm{Ord}^\star$. Объект A из $\mathbf{C}_{I \times \square}$, $I \in \mathrm{Ord}$, назовем декартовым, если

$$A \to (\mathrm{id}_I \times i_\lrcorner)_* (\mathrm{id}_I \times i_\lrcorner)^* A$$

— изоморфизм. Кодекартовость определяется аналогично, с помощью замены правой системы диаграммных категорий $\mathbf{C}$ на левую, $\lrcorner$ на $\ulcorner$ и $(\mathrm{id}_I \times i_\lrcorner)_*$ на $(\mathrm{id}_I \times i_\ulcorner)_!$, и обращая направление стрелки. Из аксиомы об изоморфизмах и предложения 1.8, приведенного ниже, следует, что объект $A \in \mathbf{C}_{I \times \square}$ декартов (кодекартов) тогда и только тогда, когда объект $A_{x,\square} = (i_{x,I} \times \mathrm{id}_\square)^* A$ декартов (кодекартов) в $\mathbf{C}_\square$ для всех $x \in I$.

Пусть $\mathbf{C}$ — левая система диаграммных категорий. Для любого $I \in \mathrm{Ord}$ через $\mathbf{C}(I)$ обозначим левую систему диаграммных категорий, определенную как $\mathbf{C}(I)_J = \mathbf{C}_{I\times J}$. Здесь I играет роль параметра.

Предложение 1.8. *Пусть $\mathbf{C}$ — левая система диаграммных категорий, $f : I \to J$ — функтор в $\mathrm{Ord}^\star$. Тогда f задает точный справа функтор $f^* : \mathbf{C}(J) \to \mathbf{C}(I)$, индуцированный $(f \times 1_K)^* : \mathbf{C}_{J\times K} \to \mathbf{C}_{I\times K}$, $K \in \mathrm{Ord}^\star$. В частности, он сохраняет кодекартовы квадраты. Двойственное утверждение выполнено также для правых систем диаграммных категорий.*

Доказательство. Если $g : K \to L$ — функтор в $\mathrm{Ord}^\star$, требуется показать, что естественный морфизм $\gamma : (1_I \times g)_!(f \times 1_K)^* \to (f \times 1_L)^*(1_J \times g)_!$ — изоморфизм. Пусть $A \in \mathbf{C}_{J\times K}$ и $(x, y) \in I \times L$.

Морфизм $\varphi_{x,y} : 1\times g/(x, y) \to g/y$, $((u, u \to x), (v, g(v) \to y)) \mapsto (v, g(v) \to y)$, имеет правый сопряженный $\psi_{x,y} : g/y \to 1 \times g/(x, y)$, $(v, g(v) \to y) \mapsto ((x, x = x), (v, g(v) \to y))$. По предложению 1.6 имеем $\underrightarrow{\mathrm{Holim}}_{1\times g/(x,y)} \simeq \underrightarrow{\mathrm{Holim}}_{g/y}\psi^*_{x,y}$.

По предложению 1.4

$$\begin{aligned}(1_I \times g)_!(f \times 1_K)^*A_{(x,y)} &\simeq \underrightarrow{\mathrm{Holim}}_{1_I\times g/(x,y)} j^*_{(x,y)}(f \times 1_K)^*A\\ &\simeq \underrightarrow{\mathrm{Holim}}_{g/y}\psi^*_{x,y} j^*_{(x,y)}(f \times 1_K)^*A.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}(f \times 1_L)^*(1_J \times g)_!A_{(x,y)} &= i^*_{(f(x),y)}(1_J \times g)_!A \simeq \underrightarrow{\mathrm{Holim}}_{1_J\times g/(f(x),y)} j^*_{(f(x),y)}A\\ &\simeq \underrightarrow{\mathrm{Holim}}_{g/y}\psi^*_{f(x),y} j^*_{(f(x),y)}A = \underrightarrow{\mathrm{Holim}}_{g/y}\psi^*_{x,y} j^*_{(x,y)}(f \times 1_K)^*A.\end{aligned}$$

Здесь мы использовали соотношение $j_{(f(x),y)}\psi_{f(x),y} = (f \times 1_K) j_{(x,y)}\psi_{x,y}$. Итак, γ — изоморфизм. Условия согласованности (3) проверяются непосредственно. $\bullet$

Определение. Пусть $\mathbf{C}$ — правая (соответственно левая) система диаграммных категорий. *Квадратом* в I назовем функтор $i : \square \to I$, инъективный на множестве объектов. Пусть A — объект из $\mathbf{C}_I$. Говорим, что A *делает квадрат i декартовым* (соответственно *кодекартовым*), если i^*A декартов (соответственно кодекартов).

Предложение 1.9. *Пусть $\mathbf{C}$ — левая система диаграммных категорий, i — квадрат в ч.у.м. I. Если функтор $\ulcorner \to (I - i(1, 1)/i(1, 1))$ имеет левый сопряженный и $A = f_!B$, где $f : J \to I$ — функтор, не содержащий $i(1, 1)$ в своем образе, то A делает квадрат i кодекартовым. Аналогичное утверждение выполнено, когда $\mathbf{C}$ — правая система диаграммных* *категорий, функтор $\lrcorner \to (I - i(0,0) \setminus i(0,0))$ обладает правым сопряженным, и $A = f_* B$, где $f : J \to I$ — функтор, не содержащий $i(0,0)$ в своем образе.*

Доказательство. Доказательство проводится аналогично [5, 1.4.5]. $\bullet$

Предложение 1.10 (конкатенация квадратов и (ко-)декартовость)**.** *Пусть $\mathbf{C}$ — левая (соответственно правая) система диаграммных категорий, $d_{0,1,2} : \Delta^1 \to \Delta^2$ — три монотонные инъекции и $A \in \mathbf{C}_{\Delta^2 \times \Delta^1}$. Допустим, что $(d_2 \times \mathrm{id}_{\Delta^1})^* A \in \mathbf{C}_\square$ кодекартов (соответственно $(d_0 \times \mathrm{id}_{\Delta^1})^* A \in \mathbf{C}_\square$ декартов). Тогда $(d_0 \times \mathrm{id}_{\Delta^1})^* A$ кодекартов (соответственно $(d_2 \times \mathrm{id}_{\Delta^1})^* A \in \mathbf{C}_\square$ декартов) тогда и только тогда, когда $(d_1 \times \mathrm{id}_{\Delta^1})^* A$ кодекартов (соответственно $(d_1 \times \mathrm{id}_{\Delta^1})^* A \in \mathbf{C}_\square$ декартов).*

Доказательство. Доказательство проводится аналогично [5, 1.4.6]. $\bullet$

Предложение 1.11. *Пусть $\mathbf{C}$ — левая (соответственно правая) система диаграммных категорий. Для любого I категория $\mathbf{C}_I$ имеет нуль-объект и конечные копроизведения (соответственно произведения). Для любого функтора $f : I \to J$ функтор $f_!$ (соответственно f_*) сохраняет копроизведения (соответственно произведения).*

Доказательство. Пусть $f : I^\star \to \varnothing^\star$ — единственный функтор. Включение $g : \varnothing^\star \to I^\star$ сопряжено слева и справа к f. Тогда g^* сопряжен слева и справа к f^*. Поэтому, если $0 \in \mathbf{C}_\varnothing$, объект $f^* 0$ (обозначим его также через 0) — нуль-объект в $\mathbf{C}_I$.

Пусть $I \coprod I$ — дизъюнктное объединение двух копий I, $p : I \coprod I \to I$ — функтор, тождественный на каждой копии I. По аксиоме о дизъюнктном объединении $\mathbf{C}_{I \coprod I} \simeq \mathbf{C}_I \times \mathbf{C}_I$. Следовательно, функтор $p_!$ обеспечивает копроизведения. Так как $f_!$ сопряжен слева к f^*, где $f : I \to J$ — функтор в Dia, то он сохраняет копроизведения. $\bullet$

Пусть $f : I^\star \to J^\star$ — функтор в $\mathrm{Dia}^\star$ и $x \in I$. Если $f(x) = \star$, то $f^* A_x = i^*_{x,I} f^* A = 0$ для всякого $A \in \mathbf{C}_J$. В самом деле, композиция $0^\star \xrightarrow{i_{x,I}} I^\star \xrightarrow{f} J^\star$ пропускается как $0^\star \xrightarrow{j} \varnothing^\star \xrightarrow{l} J^\star$, откуда $f^* A_x = j^* l^* A = 0$.

§2. Дериваторы

2.1. Определения. Пусть Dia — категория диаграмм. До сих пор мы рассматривали только функторы

$$\mathbf{C} : \mathrm{Dia}^{\star\mathrm{op}} \to \mathbf{CAT}$$

с областью определения $\mathrm{Dia}^\star$. Горизонтальные морфизмы $I \to J$ в $\mathrm{Dia}^\star$ определены функторами $I^\star \to J^\star$, отображающими $\star$ в $\star$. Особый интерес представляют также функторы

$$\mathbf{D} : \mathrm{Dia}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{CAT} \tag{4}$$

с областью определения в исходной категории Dia. Здесь мы следуем терминологии [7].

Все аксиомы §1 могут быть также переформулированы для морфизмов и биморфизмов в Dia.

Определение. Функтор (4) называем *предеривататором*, если выполнена аксиома функториальности. Он *левый* (*соответственно правый*) *дериватор*, если выполнены аксиома функториальности, аксиома об изоморфизмах, аксиома дизъюнктного объединения, левая (соответственно правая) аксиома гомотопических расширений Кана и левая (соответственно правая) аксиома замены базы, приведенная ниже.

Аксиома замены базы. Пусть $f : I \to J$ — морфизм в Dia и $x \in J$. Рассмотрим диаграмму в Dia

$$\begin{tikzcd} f/x \arrow[r, "j_x"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\alpha_x"] & I \arrow[d, "f"] \\ 0 \arrow[r, "i_{x,J}"'] & J, \end{tikzcd}$$

в которой j_x — естественный морфизм и α_x — биморфизм

$$fj_x \to i_{x,I}p, \quad \alpha_x : fj_x(y, a : f(y) \to x) = f(y) \xrightarrow{a} x = i_{x,J}p(y,a).$$

Биморфизм α_x индуцирует биморфизм $\beta_x : p_! j_x^* \to i_{x,I}^* f_!$, являющийся композицией

$$p_! j_x^* \to p_! j_x^* f^* f_! \xrightarrow{p_!\alpha_x^* f_!} p_! p^* i_x^* f_! \to i_x^* f_!.$$

Левая аксиома замены базы требует, чтобы β_x был изоморфизмом.

Симметрично, правая аксиома замены базы говорит, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} f \setminus x \arrow[r, "l_x"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, phantom, "\nearrow\gamma_x"] & I \arrow[d, "f"] \\ 0 \arrow[r, "i_{x,J}"'] & J \end{tikzcd}$$

задает изоморфизм $\delta_x : i_{x,I}^* f_* \to q_* l_x^*$.

Левые и правые дериваторы будем называть *бидериваторами*.

Пример. Если категория $\mathcal{C}$ имеет копределы, представимый предериватор, ассоциированный с $\mathcal{C}$, является левым дериватором. Типичный пример бидериватора (с областью Dirf) задается функтором $I \mapsto \mathrm{Ho}\mathcal{C}^I$, где $\mathcal{C}$ — замкнутая модельная категория (см. более подробно [14]).

Отныне все левые или правые дериваторы имеют фиксированную область определения Dia. Понятия морфизма двух предериваторов, расслоенного произведения пары морфизмов определяются по аналогии с предсистемами диаграммных категорий. Аналогично доказывается, что расслоенное произведение пары морфизмов является предериватором и что он левый (правый) дериватор всякий раз, когда оба морфизма точны справа (слева).

Предложение 2.1. *Пусть $\mathbf{D}$ — левый дериватор, $f : I \to J$ — функтор в* Dia, *$x \in J$. Для $A \in \mathbf{D}_I$ имеется изоморфизм: $(f_! A)_x \simeq \underrightarrow{\mathrm{Holim}}_{f/x} j_x^* A$. Если $\mathbf{D}$ — правый дериватор, выполнено двойственное утверждение для проективных гомотопических пределов и правых гомотопических расширений Кана.*

Доказательство. Очевидно. $\bullet$

Если f — включение полной подкатегории $I \subseteq J$, для каждого объекта $x \in I$ категория f/x имеет конечный объект (x, id_x). Поэтому выполнено следующее

Следствие 2.2. *Пусть $\mathbf{D}$ — левый* (*соответственно правый*) *дериватор и пусть $f : I \to J$ — включение полной подкатегории. Тогда канонический в $\mathbf{D}_I$ морфизм $A \to f^* f_! A$* (*соответственно $f^* f_* A \to A$*) *— изоморфизм для любого объекта $A \in \mathbf{D}_I$.*

Понятие (ко-)декартового квадрата определяется аналогично случаю правых (левых) систем диаграммных категорий. Ниже мы формулируем утверждения о (ко-)декартовых квадратах без доказательств. Они дословно повторяют доказательства предыдущего параграфа.

Лемма 2.3. *Пусть $\mathbf{D}$ — левый дериватор. Объект $A \in \mathbf{D}_\square$ кодекартов тогда и только тогда, когда $A_{(1,1)} \simeq \underrightarrow{\mathrm{Holim}}_{\ulcorner} i_{\ulcorner}^* A$. Двойственно, если $\mathbf{D}$ — правый дериватор, то объект $A \in \mathbf{D}_\square$ декартов тогда и только тогда, когда $A_{(0,0)} \simeq \underleftarrow{\mathrm{Holim}}_{\lrcorner} i_{\lrcorner}^* A$.*

Для $I \in \mathrm{Dia}$ обозначим через $\mathbf{D}(I)$ левый дериватор, определенный по правилу: $\mathbf{D}(I)_J = \mathbf{D}_{I \times J}$.

Предложение 2.4. *Пусть* $\mathbf{D}$ *— левый дериватор,* $f : I \to J$ *— функтор в* Dia. *Тогда* f *задает точный справа функтор* $f^* : \mathbf{D}(J) \to \mathbf{D}(I)$, *индуцированный* $(f \times 1_K)^* : \mathbf{D}_{J\times K} \to \mathbf{D}_{I\times K}$, $K \in \mathrm{Dia}$. *В частности, он сохраняет кодекартовы квадраты. Двойственное утверждение верно также для правых дериваторов.*

Предложение 2.5. *Пусть* $\mathbf{D}$ *— левый дериватор,* i *— квадрат в* $I \in \mathrm{Dia}$. *Если функтор* $\ulcorner \to (I - i(1,1)/i(1,1))$ *имеет левый сопряженный и* $A = f_!B$, *где* $f : J \to I$ *— функтор, не содержащий* $i(1,1)$ *в своем образе, то* A *делает квадрат* i *кодекартовым. Аналогичное утверждение выполнено, когда* $\mathbf{D}$ *— правый дериватор, функтор* $\lrcorner \to (I - i(0,0) \setminus i(0,0))$ *обладает правым сопряженным, и* $A = f_*B$, *где* $f : J \to I$ *— функтор, не содержащий* $i(0,0)$ *в своем образе.*

Предложение 2.6 (конкатенация квадратов и (ко-)декартовость)**.** *Пусть* $\mathbf{D}$ *— левый* (*соответственно правый*) *дериватор,* $d_{0,1,2} : \Delta^1 \to \Delta^2$ *— три монотонные инъекции и* $A \in \mathbf{D}_{\Delta^2\times\Delta^1}$. *Допустим, что* $(d_2 \times \mathrm{id}_{\Delta^1})^*A \in \mathbf{D}_\square$ *кодекартов* (*соответственно* $(d_0 \times \mathrm{id}_{\Delta^1})^*A \in \mathbf{D}_\square$ *декартов*). *Тогда* $(d_0 \times \mathrm{id}_{\Delta^1})^*A$ *кодекартов* (*соответственно* $(d_2 \times \mathrm{id}_{\Delta^1})^*A \in \mathbf{D}_\square$ *декартов*) *тогда и только тогда, когда* $(d_1 \times \mathrm{id}_{\Delta^1})^*A$ *кодекартов* (*соответственно* $(d_1 \times \mathrm{id}_{\Delta^1})^*A \in \mathbf{D}_\square$ *декартов*).

Предложение 2.7. *Пусть* $\mathbf{D}$ *— левый* (*соответственно правый*) *дериватор. Для всякого* I *категория* $\mathbf{D}_I$ *имеет начальный* (*соответственно конечный*) *объект и конечные копроизведения* (*соответственно произведения*). *Для всякого функтора* $f : I \to J$ *функтор* $f_!$ (*соответственно* f_*) *сохраняет копроизведения* (*соответственно произведения*).

Доказательство. Пусть $f : \varnothing \to I$ — включение и $0 \in \mathbf{D}_\varnothing$. Так как $f_!$ сопряжен слева к f^*, объект $f_!0$ (обозначим его также через 0) — начальный объект в $\mathbf{D}_I$.

Пусть $I \coprod I$ — дизъюнктное объединение двух копий I, $p : I \coprod I \to I$ — функтор, тождественный на каждой копии I. По аксиоме о дизъюнктном объединении $\mathbf{D}_{I\coprod I} \simeq \mathbf{D}_I \times \mathbf{D}_I$. Следовательно, функтор $p_!$ обеспечивает копроизведения. Так как $f_!$ сопряжен слева к f^*, где $f : I \to J$ — функтор в Dia, то он сохраняет копроизведения, а f^* — произведения (когда они существуют). $\bullet$

2.2. Выделенные дериваторы. Дериваторы, с которыми мы будем работать, должны отвечать некоторым дополнительным условиям. Мы начнем с определений.

Определение. Говорят, что левый дериватор *выделен*, если он удовлетворяет следующим трем условиям:

(1) для любой замкнутой иммерсии $f : I \to J$ в Dia структурный функтор $f_!$ имеет левый сопряженный $f^?$;

(2) для любой открытой иммерсии $f : I \to J$ в Dia, структурный функтор f^* имеет правый сопряженный f_*;

(3) для любой открытой иммерсии $f : I \to J$ в Dia и любого объекта $x \in J$ морфизм замены базы, полученный из диаграммы

$$\begin{tikzcd} f \setminus x \arrow[r, "l_x"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, phantom, "\nearrow\gamma_x"] & I \arrow[d, "f"] \\ 0 \arrow[r, "i_{x,J}"'] & J, \end{tikzcd}$$

производит изоморфизм $\delta_x : i^*_{x,I} f_* \to q_* l^*_x$. Понятие правого выделенного дериватора определяется аналогично.

Пусть $f : I \to J$ — открытая иммерсия в Dia, $x \in J$ и $q : f \setminus x \to 0$ — единственный функтор. Тогда всегда существует правый сопряженный к q^* функтор q_*. Действительно, если x не принадлежит I, то $f \setminus x = \varnothing$, и q_* существует, потому что $\varnothing \to 0$ — открытая иммерсия. Если $x \in I$, то $f \setminus x$ имеет начальный объект (x, id_x), и мы полагаем $q_* = p^*$, где $0 \overset{p}{\mapsto} (x, \mathrm{id}_x) \in f \setminus x$.

Пусть $\mathbf{D}$ — левый (правый) выделенный дериватор. Тогда $\mathbf{D}_I$ обладает нуль-объектом для любого $I \in \mathrm{Dia}$, ибо включение $\varnothing \to I$ — как замкнутая, так и открытая иммерсия, и потому $0 = f_! 0$ $(0 = f_* 0)$ — также конечный (начальный) объект. Имеем также, что для любой открытой иммерсии $f : I \to J$ в Dia и любого объекта $x \in J$ „значение“ $f_* A_x$ в x, $A \in \mathbf{D}_I$, — это либо A_x, если $x \in I$, либо 0, в противном случае.

Далее будем называть левый и правый выделенный дериватор *выделенным бидериватором*.

2.3. Пример. Если $I \in \mathrm{Dirf}$ и $\mathcal{C}$ — категория Вальдхаузена, то категория функторов $\mathcal{C}^I$ также является категорией Вальдхаузена. Морфизм $F \to G$ в $\mathcal{C}^I$ — корасслоение (соответственно слабая эквивалентность), если таковым является $F(x) \to G(x)$ для всех $x \in I$.

Определение. Пусть $\mathcal{A}$ — категория с конечными копроизведениями и начальным объектом e. Допустим, что $\mathcal{A}$ имеет два выделенных класса морфизмов, которые будем называть *слабыми эквивалентностями* и *корасслоениями*. Назовем морфизм *тривиальным корасслоением*, если он является как слабой эквивалентностью, так и корасслоением. Следуя терминологии Брауна [15], назовем $\mathcal{A}$ *категорией корасслоенных объектов*, если выполнены следующие аксиомы:

(A) пусть f и g — морфизмы, для которых определена композиция gf. Если два морфизма из f, g, gf — слабые эквивалентности, то также и третий морфизм;

(B) композиция двух корасслоений — снова корасслоение. Каждый изоморфизм является корасслоением;

(C) если в диаграмме

$$A \xleftarrow{u} C \xrightarrow{v} B$$

v — корасслоение (тривиальное корасслоение), существует расслоенное произведение $A\coprod_C B$, и $A \to A\coprod_C B$ — корасслоение (тривиальное корасслоение);

(D) всякий морфизм u в $\mathcal{A}$ имеет факторизацию $u = pi$, где p — слабая эквивалентность, а i — корасслоение;

(E) для каждого объекта A морфизм $e \to A$ является корасслоением.

Для примера, категория Вальдхаузена ограниченных комплексов $C^b(\mathcal{E})$ точной категории $\mathcal{E}$, в которой слабые эквивалентности суть квазиизоморфизмы, а корасслоения — покомпонентно допустимые мономорфизмы, является категорией корасслоенных объектов.

Пусть $\mathcal{C}$ — категория Вальдхаузена корасслоенных объектов, и пусть $\operatorname{Ho}\mathcal{C}$ обозначает категорию, полученную из $\mathcal{C}$ путем обращения слабых эквивалентностей. Можно ввести понятие гомотопии для двух морфизмов f и g (см. [15]). Рассмотрим категорию $\pi\mathcal{C}$, у которой объекты суть те же, что и в $\mathcal{C}$, а $\pi\mathcal{C}(A,B)$ — это фактор-множество $\mathcal{C}(A,B)$ по отношению эквивалентности $f \sim g$, определенному в терминах этой гомотопии. Тогда класс слабых эквивалентностей в категории $\pi\mathcal{C}$ допускает исчисление левых частных [15]. Если $I \in \mathrm{Dirf}$, то из [16, 1.31] следует, что категория функторов $\mathcal{C}^I$ является категорией Вальдхаузена корасслоенных объектов.

Теорема 2.8 (Сизинский [16]). *Если $\mathcal{C}$ — категория Вальдхаузена корасслоенных объектов, то гиперфунктор*

$$\mathbf{D}\mathcal{C} : I \in \mathrm{Dirf} \mapsto \mathbf{D}\mathcal{C}_{\mathrm{I}} = \operatorname{Ho}\mathcal{C}^{\mathrm{I}}$$

определяет левый выделенный дериватор с областью Dirf.

§3. $S.$-конструкция

В этом параграфе всюду предполагается, что $\mathbf{B}$ — либо левая система диаграммных категорий (с областью $\mathrm{Ord}^\star$), либо левый выделенный дериватор (с областью Dia). Пусть $\operatorname{Ar}\Delta^n$ — ч.у.м. пар (i,j), $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, где $(i,j) \leqslant (i',j')$, если $i \leqslant i'$ и $j \leqslant j'$. Как категория, оно может быть отождествлено с категорией стрелок Δ^n.

Для $0 \leqslant i < j < k \leqslant n$ определим функтор

$$a_{i,j,k} : \square \to \mathrm{Ar}\,\Delta^n \tag{5}$$

по правилу

$$(0,0) \mapsto (i,j), \quad (0,1) \mapsto (i,k), \quad (1,0) \mapsto (j,j), \quad (1,1) \mapsto (j,k).$$

Для $n \geqslant 0$ через $S_n\mathbf{B}$ обозначим полную подкатегорию $\mathbf{B}_{\mathrm{Ar}\,\Delta^n}$, состоящую из таких объектов X:

- ◇ для любого $i \leqslant n$ объект $X_{(i,i)}$ изоморфен нулю в $\mathbf{B}_0$;
- ◇ при $n > 1$ для любых $0 \leqslant i < j < k \leqslant n$ квадрат $a^*_{i,j,k}X$ кодекартов.

Определение $S_n\mathbf{B}$ аналогично определению $S_n\mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ — категория Вальдхаузена (более детально см. [9]). Заметим, что $S_0\mathbf{B}$ — полная подкатегория нуль-объектов в $\mathbf{B}_0$. Категория $S_1\mathbf{B}$ отождествляется с полной подкатегорией объектов $X \in \mathbf{B}_{\Delta^2}$ таких, что X_0 и X_2 изоморфны нулю.

Предложение 3.1. *Для $n \geqslant 1$ рассмотрим функтор $\ell : \Delta^{n-1} \to \mathrm{Ar}\,\Delta^n$, переводящий j в $(0, j+1)$. Тогда функтор ℓ^* индуцирует эквивалентность категорий $S_n\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}_{\Delta^{n-1}}$.*

Доказательство. Разобьем доказательство на две части.

I. Рассмотрим отдельно случаи левой системы диаграммных категорий и левого выделенного дериватора.

(a) Пусть $\mathbf{B}$ — левая система диаграммных категорий. Рассмотрим такую полную подкатегорию I категории $\mathrm{Ar}\,\Delta^n$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \begin{tikzcd} (0,1) \arrow[r] \arrow[d] & (0,2) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & (0,n) \\ (1,1) & & & \end{tikzcd} \end{array} \right\} \bigcup_{2 \leqslant i \leqslant n} (i,i),$$

а также морфизм $g : \Delta^{n-1} \to I$, $j \mapsto (0, j+1)$. Так как g — открытая иммерсия, по лемме об иммерсиях g обладает левым сопряженным $f : I^\star \to \Delta^{n-1\star}$, $(0,j) \mapsto j-1$ и $(i,i) \mapsto \star$. Следовательно, f^* сопряжен справа к g^*.

Пусть $\widetilde{\mathbf{B}}_I$ — полная подкатегория $\mathbf{B}_I$, состоящая из $X \in \mathbf{B}_I$ таких, что $X_{(i,i)}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, изоморфны нулю. Мы утверждаем, что f^* и g^* — взаимнообратные эквивалентности между $\mathbf{B}_{\Delta^{n-1}}$ и $\widetilde{\mathbf{B}}_I$. В самом деле, $f^*A \in \widetilde{\mathbf{B}}_I$ для любого $A \in \mathbf{B}_{\Delta^{n-1}}$, и $g^*f^* = 1$. С другой стороны, морфизм сопряженности $B \to f^*g^*B$ является изоморфизмом для всякого $B \in \widetilde{\mathbf{B}}_I$.

(b) Пусть $\mathbf{B}$ — левый выделенный дериватор. Так как g — открытая иммерсия, функтор g^* обладает правым сопряженным g_*. Покажем, что g^* и

g_* — взаимно-обратные эквивалентности между $\mathbf{B}_{\Delta^{n-1}}$ и $\widetilde{\mathbf{B}}_I$. Действительно, морфизм сопряженности $g^* g_* \to 1$ является изоморфизмом по следствию 2.2. Так как g — открытая иммерсия, $g_* B \in \widetilde{\mathbf{B}}_I$ для всех $B \in \mathbf{B}_{\Delta^{n-1}}$ (см. соответствующие замечания на с. 147). Отсюда немедленно следует, что морфизм сопряженности $B \to g_* g^* B$ — изоморфизм для всякого $B \in \widetilde{\mathbf{B}}_I$.

II. Далее, пусть $h : I \to \operatorname{Ar} \Delta^n$ — включение. По предложениям 1.9 и 2.5 для любого $A \in \mathbf{B}_I$ объект $h_! A$ делает все квадраты

$$\begin{tikzcd}
(0,0) \arrow[r] & (0,1) \arrow[r] \arrow[d] & (0,2) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & (0,n-1) \arrow[r] \arrow[d] & (0,n) \arrow[d] \\
& (1,1) \arrow[r] & (1,2) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & (1,n-1) \arrow[r] \arrow[d] & (1,n) \arrow[d] \\
& & (2,2) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & (2,n-1) \arrow[r] \arrow[d] & (2,n) \arrow[d] \\
& & & \ddots & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
& & & & (n-1,n-1) \arrow[r] & (n-1,n) \arrow[d] \\
& & & & & (n,n)
\end{tikzcd}$$

категории $\operatorname{Ar} \Delta^n$ кодекартовыми. По предложениям 1.10 и 2.6 то же справедливо для всех конкатенаций квадратов.

По предложениям 1.4 и 2.1 $h_! A_{(0,0)}$ изоморфен нулю, а по следствиям 1.5 и 2.2 канонический морфизм $A \to h^* h_! A$ является изоморфизмом для всех $A \in \mathbf{B}_I$. Если $1 \leqslant i \leqslant n$, то для любого $A \in \widetilde{\mathbf{B}}_I$

$$0 \simeq A_{(i,i)} \simeq h^* h_! A_{(i,i)} = h_! A_{(i,i)}.$$

Таким образом, $h_!$ переводит объект $A \in \widetilde{\mathbf{B}}_I$ в объект из $S_n \mathbf{B}$. Ограничение $h_!$ на $\widetilde{\mathbf{B}}_I$ обозначим тем же символом. Чтобы доказать, что $h_! : \widetilde{\mathbf{B}}_I \to S_n \mathbf{B}$ — эквивалентность, остается проверить, что морфизм сопряженности

$$h_! h^* B \to B \tag{6}$$

— изоморфизм для любого $B \in S_n\mathbf{B}$. По аксиоме об изоморфизмах достаточно показать, что он изоморфизм в каждом $(i,j) \in \operatorname{Ar}\Delta^n$. Очевидно, это так в каждом $(i,j) \in I \cup (0,0)$.

Если $1 \leqslant i < j \leqslant n$, рассмотрим квадрат $a_{0,i,j} : \square \to \operatorname{Ar}\Delta^n$. Ограничение $a_{0,i,j}$ на $\ulcorner$ обозначим через α. Морфизм (6) индуцирует морфизм

$$\alpha^* h_! h^* B \to \alpha^* B, \tag{7}$$

а также морфизм

$$h_! h^* B_{(i,j)} \simeq \underrightarrow{\operatorname{Holim}}_{\ulcorner}\, \alpha^* h_! h^* B \to \underrightarrow{\operatorname{Holim}}_{\ulcorner}\, \alpha^* B \simeq B_{(i,j)}.$$

Мы использовали здесь леммы 1.7 и 2.3. Последний морфизм — изоморфизм всякий раз, когда (7) — изоморфизм. Так как $\operatorname{Im}\alpha \subset I$, то (7) — всегда изоморфизм. Поэтому (6) — изоморфизм в каждом $(i,j) \in \operatorname{Ar}\Delta^n$, а, значит, $h_!$ и h^* взаимно обратны по аксиоме об изоморфизмах.

Так как $\ell = hg$, функтор $\ell^* = g^* h^* : S_n\mathbf{B} \to \mathbf{B}_{\Delta^{n-1}}$ — эквивалентность, поскольку как g^*, так и h^* — эквивалентности по рассуждениям, приведенным выше. $\bullet$

Замечание. Отметим, что если $\mathbf{B}$ — левая система диаграммных категорий (левый выделенный дериватор), то квазиобратный к ℓ^* функтор задается $h_! f^*$ $(h_! g_*)$.

Напомним, что через $\mathbf{B}(I)$ мы обозначаем левую систему диаграммных категорий или левый выделенный дериватор, соответственно определенный как $\mathbf{B}(I)_J = \mathbf{B}_{I\times J}$. Каждый морфизм $f : I \to J$ задает функтор $f^* : \mathbf{B}(J) \to \mathbf{B}(I)$. Ниже нам понадобится следующее

Предложение 3.2. *Структурный функтор* $f^* : \mathbf{B}(J)_0 = \mathbf{B}_J \to \mathbf{B}(I)_0 = \mathbf{B}_I$ *сохраняет конечные произведения и копроизведения.*

Доказательство. Доказательство проводится аналогично [5, 1.4.7]. $\bullet$

По предложениям 1.8 и 2.4 $f^* : \mathbf{B}(J) \to \mathbf{B}(I)$ сохраняет кодекартовы квадраты. Получаем поэтому функтор (обозначим его той же буквой)

$$f^* : S_n\mathbf{B}(J) \to S_n\mathbf{B}(I),$$

и для каждого бифунктора $\varphi : f \to g$ бифунктор φ^* индуцирует естественное преобразование

$$\begin{tikzcd} S_n\mathbf{B}(J) \arrow[r, bend left, "f^*"] \arrow[r, bend right, "g^*"'] & S_n\mathbf{B}(I) \end{tikzcd} .$$

Положим $\mathbf{S}_n\mathbf{B}_I = S_n\mathbf{B}(I)$. Тогда $\mathbf{S}_n\mathbf{B}$ — предсистема диаграммных категорий или предериватор соответственно. $\mathbf{S}_0\mathbf{B}$ тривиальна, и для $n \geqslant 1$ предложение 3.1 влечет эквивалентность

$$\mathbf{S}_n\mathbf{B} \simeq \mathbf{B}(\Delta^{n-1}).$$

Так как $\mathbf{B}(\Delta^{n-1})$ — левая система диаграммных категорий или левый выделенный дериватор соответственно, то также и $\mathbf{S}_n\mathbf{B}$. Поэтому получаем симплициальную левую систему диаграммных категорий или симплициальный левый выделенный дериватор соответственно

$$\mathbf{S}.\mathbf{B} : \Delta^n \mapsto \mathbf{S}_n\mathbf{B}.$$

Рассмотрим следующую симплициальную категорию:

$$S.\mathbf{B} : \Delta^n \mapsto S_n\mathbf{B}.$$

Для $n \geqslant 0$ через $iS_n\mathbf{B}$ обозначим подкатегорию $S_n\mathbf{B}$, чьи объекты суть те же, что и в $S_n\mathbf{B}$, и чьи морфизмы — изоморфизмы в $S_n\mathbf{B}$, и пусть $i.S_n\mathbf{B}$ — нерв $iS_n\mathbf{B}$. Тогда получаем следующий бисимплициальный объект:

$$i.S. : \Delta^m \times \Delta^n \mapsto i_mS_n\mathbf{B}.$$

Лемма 3.3. *Пространство $|i.S.\mathbf{B}|$ является связным.*

Доказательство. Геометрическая реализация бисимплициального множества — это диагональ. Если $O_1, O_2 \in i_0S_0\mathbf{B}$ и $f : O_1 \to O_2$ — единственный морфизм в $S_0\mathbf{B}$, соединяющий их, то для $A = \sigma_0(f) \in i_1S_1\mathbf{B}$ имеем $\partial_0 A = O_2, \partial_1 A = O_1$. $\bullet$

Определение. *Группа Гротендика* $K_0(\mathbf{B})$ порождена множеством классов изоморфности $[B]$ объектов из $\mathbf{B}_0$ и имеет такие соотношения: $[B] = [A]\cdot[C]$ для любого $E \in S_2\mathbf{B}$ такого, что $E_{(0,1)} = A$, $E_{(0,2)} = B$ и $E_{(1,2)} = C$.

Лемма 3.4. $\pi_1|i.S.\mathbf{B}| \simeq K_0(\mathbf{B})$.

Доказательство. $\pi_1|i.S.\mathbf{B}|$ — свободная группа на $\pi_0|i.S_1\mathbf{B}|$ по модулю соотношений $d_1(x) = d_2(x)d_0(x)$ для каждого $x \in \pi_0|i.S_2\mathbf{B}|$. Это следует из того, что $\pi_1|i.S_0\mathbf{B}| = 0$ и из спектральной последовательности Бусфелда–Фридландера [17]. $\pi_0|i.S_1\mathbf{B}|$ — множество классов изоморфности объектов из $\mathbf{B}_0$, $\pi_0|i.S_2\mathbf{B}|$ — множество классов изоморфности объектов из $S_2\mathbf{B}$, и морфизмы $d_i : S_2\mathbf{B} \to S_1\mathbf{B}$ посылают E в $E_{(1,2)}$, $E_{(0,2)}$ и в $E_{(0,1)}$ соответственно. $\bullet$

Если $\mathcal{A}$ — точная категория, ее ограниченная производная категория $D^b(\mathcal{A})$ строится следующим образом (мы следуем здесь определениям Келлера [18]).

Пусть $H^b(\mathcal{A})$ — гомотопическая категория категории ограниченных комплексов $\mathcal{C} = C^b(\mathcal{A})$, т.е. фактор-категория $\mathcal{C}$ по модулю гомотопической эквивалентности. Пусть $Ac(\mathcal{A})$ — полная подкатегория в $H^b(\mathcal{A})$, состоящая из ацикличных комплексов. Называем комплекс

$$X^n \longrightarrow X^{n+1} \longrightarrow X^{n+2}$$

ацикличным, если каждый морфизм $X^n \to X^{n+1}$ факторизуется в $\mathcal{A}$ как $X^n \overset{e_n}{\twoheadrightarrow} D^n \overset{m_n}{\rightarrowtail} X^{n+1}$, где e_n — допустимый эпиморфизм, а m_n — допустимый мономорфизм. Кроме того, $D^n \overset{m_n}{\rightarrowtail} X^{n+1} \overset{e_{n+1}}{\twoheadrightarrow} D^{n+1}$ должна быть точной последовательностью.

Если точная категория идемпотентно замкнута, то каждый стягиваемый комплекс ацикличен. Пусть $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ — полная подкатегория $H^b(\mathcal{A})$, чьи объекты суть комплексы изоморфные в $H^b(\mathcal{A})$ ацикличным комплексам. Имеется иное описание $\mathcal{N}$. Пусть $\mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}$ — универсальный аддитивный функтор в идемпотентно замкнутую точную категорию $\tilde{\mathcal{A}}$. Он точен и отражает точные последовательности, и $\mathcal{A}$ замкнута относительно расширений в $\tilde{\mathcal{A}}$ (см. [19, A.9.1]). Тогда комплекс с компонентами из $\mathcal{A}$ принадлежит $\mathcal{N}$ тогда и только тогда, когда его образ в $H^b(\tilde{\mathcal{A}})$ ацикличен. Категория $\mathcal{N}_{\tilde{\mathcal{A}}} = Ac(\tilde{\mathcal{A}})$ является толстой в $H^b(\tilde{\mathcal{A}})$. Заметим, что комплекс над $\tilde{\mathcal{A}}$ ацикличен тогда и только тогда, когда он имеет тривиальную гомологию, вычисленную в окружающей $\tilde{\mathcal{A}}$ абелевой категории. Тогда $\mathcal{N}$ — толстая подкатегория в $H^b(\mathcal{A})$. Обозначим через Σ мультипликативную систему, ассоциированную с $\mathcal{N}$, и назовем элементы из Σ *квазиизоморфизмами*. Морфизм s — квазиизоморфизм тогда и только тогда, когда в каждом треугольнике $L \xrightarrow{s} M \to N \to L[1]$ комплекс N принадлежит $\mathcal{N}$.

Производная категория определяется как

$$D^b(\mathcal{A}) = H^b(\mathcal{A})/\mathcal{N} = H^b(\mathcal{A})[\Sigma^{-1}].$$

Ясно, что морфизм — квазиизоморфизм тогда и только тогда, когда его образ в $C^b(\tilde{\mathcal{A}})$ — квазиизоморфизм, и тогда и только тогда, когда его образ в $D^b(\mathcal{A})$ — изоморфизм.

Напомним, что группа Гротендика $K_0(D^b(\mathcal{A}))$ определяется как группа, порожденная множеством классов изоморфности $[B]$ объектов из $D^b(\mathcal{A})$, с соотношениями: $[B] = [A] + [C]$ для всякого треугольника $A \to B \to C \to A[1]$.

Согласно [18] (см. также [16]), гиперфунктор $I \mapsto D^b(\mathcal{A}^I)$ задает выделенный бидериватор с областью Dirf. Обозначим его через $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$.

Лемма 3.5. $K_0(\mathbf{D}^b(\mathcal{A})) = K_0(D^b(\mathcal{A}))$.

Доказательство. Достаточно заметить, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством классов изоморфности объектов из $S_2\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ и множеством классов изоморфности треугольников в $D^b(\mathcal{A})$ (см. более подробно [16, 6]). $\bullet$

Определение. *Алгебраическая K-теория* малой левой системы диаграммных категорий с областью $\mathrm{Ord}^\star$ или левого выделенного дериватора с областью Dia — это пространство с отмеченной точкой (фиксированный нуль-объект 0 из $\mathbf{B}_0$ берется за отмеченную точку)

$$K(\mathbf{B}) = \Omega|i.S.\mathbf{B}|.$$

K-группы для $\mathbf{B}$ суть гомотопические группы $K(\mathbf{B})$:

$$K_*(\mathbf{B}) = \pi_*(\Omega|i.S.\mathbf{B}|) = \pi_{*+1}(|i.S.\mathbf{B}|).$$

Обозначения. Через $0 \in \mathbf{B}_I$ будем также обозначать объект const^*0, где $\mathrm{const} : \mathrm{I} \to 0$ — постоянный морфизм и 0 — фиксированный нуль-объект из $\mathbf{B}_0$. Пусть (*L.s.d.c.*, *Left pointed dérivateurs*) — соответствующие категории левых систем диаграммных категорий и левых выделенных дериваторов, и точных справа морфизмов. Чтобы отображение

$$(\textit{L.s.d.c., Left pointed dérivateurs}) \xrightarrow{K} (\textit{Spaces})$$

было функториальным, далее всюду предполагается, что $\iota_{F,f} : f^*F \to Ff^*$ суть единицы для любого точного справа морфизма $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ и любого морфизма f из Dia.

Любой точный справа морфизм $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ индуцирует отображение пространств $F_* : K(\mathbf{A}) \to K(\mathbf{B})$ и их гомотопических групп $K_i(\mathbf{A}) \to K_i(\mathbf{B})$.

Можно применить $S.$-конструкцию к каждому $\mathbf{S}_n\mathbf{B}$, получая бисимплициальную левую систему диаграммных категорий и левый выделенный дериватор соответственно. Итерируя эту конструкцию, можем получить мультисимплициальный объект $\mathbf{S}.^n\mathbf{B} = \mathbf{S}.\mathbf{S}.\cdots\mathbf{S}.\mathbf{B}$ и мультисимплициальные категории $iS.^n\mathbf{B}$ изоморфизмов. Мы покажем, что выполнение теоремы аддитивности влечет, что $|i.S.^n\mathbf{B}|$ — пространство петель для $|i.S.^{n+1}\mathbf{B}|$, где $n \geqslant 1$, и что последовательность

$$\Omega|i.S.\mathbf{B}|, \Omega|i.S.S.\mathbf{B}|, \ldots, \Omega|i.S.^n\mathbf{B}|, \ldots$$

образует связный Ω-спектр $\mathbf{KB}$. В этом случае можно рассматривать K-теорию для $\mathbf{B}$ в терминах этого спектра. Это не влияет на K-группы, так как

$$\pi_i(\mathbf{KB}) = \pi_i(K(\mathbf{B})) = K_i(\mathbf{B}), \quad i \geqslant 0.$$

Теорема аддитивности остается открытой для $K(\mathbf{B})$. Тем не менее если определение K-теории как пространства $\Omega|i.S.\mathbf{B}|$ заменить бесконечнократным пространством петель

$$\Omega^\infty|i.S.^\infty\mathbf{B}| = \lim_n \Omega^n|i.S.^n\mathbf{B}|,$$

то теорема аддитивности верна (за исключением патологических случаев, которые мы никогда не встречаем на практике).

Для определения пространства K-теории триангулированного дериватора Малциниотис [7] использует Q.-конструкцию. Эта конструкция может быть продолжена на произвольные левые системы диаграммных категорий и левые выделенные дериваторы, если в определении Малциниотиса заменить бидекартовы квадраты на кодекартовы. А именно, она задается бисимплициальной категорией $Q\mathbf{B} = \{Q_{m,n}\mathbf{B}\}_{m,n\geqslant 0}$, где $Q_{m,n}\mathbf{B}$ — полная подкатегория в $\mathbf{B}_{\Delta^m\times\Delta^n}$ такая, что каждый $X \in Q_{m,n}\mathbf{B}$ делает любой квадрат $i : \Box \to \Delta^m \times \Delta^n$ кодекартовым. Через $iQ\mathbf{B}$ обозначим соответствующий максимальный группоид. Тогда $i.Q\mathbf{B}$ — трисимплициальный объект, и пространство K-теории определяется как $\Omega|\operatorname{diag}(i.Q\mathbf{B})|$.

Согласно [20], полученная K-теория эквивалентна той, которую мы определили в терминах S.-конструкции. Доказательство основывается на [9, с. 334] и переносится без всяких затруднений на наш контекст.

§4. Симплициальные предварительные сведения

Мультисимплициальные множества будут возникать естественным образом в нашей работе. Будет полезно работать с ними напрямую, не диагонализируя всю структуру. Такая работа зависит от пары лемм, которые мы приводим ниже. Мы формулируем их для бисимплициальных множеств, так как соответствующие леммы для мультисимплициальных множеств — немедленные следствия, если взять подходящие диагонали.

Лемма 4.1 ([8]). *Пусть $X_{..} \to Y_{..}$ — отображение бисимплициальных множеств и пусть для любого n отображение $X_{\cdot n} \to Y_{\cdot n}$ — гомотопическая эквивалентность. Тогда и $X_{..} \to Y_{..}$ — гомотопическая эквивалентность.*

Лемма 4.2 ([21, 5.2]). *Пусть $X_{..} \to Y_{..} \to Z_{..}$ — последовательность бисимплициальных множеств таких, что $X_{..} \to Z_{..}$ постоянно. Если $X_{\cdot n} \to Y_{\cdot n} \to Z_{\cdot n}$ — гомотопически расслоенная последовательность и $Z_{\cdot n}$ связно для любого n, тогда $X_{..} \to Y_{..} \to Z_{..}$ — также гомотопически расслоенная последовательность.*

Лемма 4.3. *Если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — малые симплициальные категории, так что множества объектов образуют симплициальные множества, и $i\mathcal{A}$, $i\mathcal{B}$ —*

соответствующие категории изоморфизмов, то каждая эквивалентность $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ индуцирует гомотопическую эквивалентность бисимплициальных объектов $F : i.\mathcal{A} \to i.\mathcal{B}$. В частности, если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — левые системы диаграммных категорий или левые выделенные дериваторы, то каждая точная справа эквивалентность $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ индуцирует гомотопическую эквивалентность $F : i.S.\mathcal{A} \to i.S.\mathcal{B}$.

Доказательство. Очевидно. •

Пусть C и D — симплициальные объекты в категории $\mathcal{C}$ и пусть Δ/Δ^1 — категория объектов над Δ^1 в Δ; они суть морфизмы $\Delta^n \longrightarrow \Delta^1$. Для любого симплициального объекта C в $\mathcal{C}$ через C^* обозначим композицию

$$(\Delta/\Delta^1)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{C} \mathcal{C},$$
$$(\Delta^n \longrightarrow \Delta^1) \mapsto \Delta^n \mapsto C_n.$$

Тогда *симплициальной гомотопией* морфизмов из C в D называется естественное преобразование $C^* \longrightarrow D^*$ [9, с. 335].

Существует функтор $P : \Delta \to \Delta$, $P\Delta^n = \Delta^{n+1}$ такой, что естественное отображение $s_0 : \Delta^n \to \Delta^{n+1} = P\Delta^n$ — это естественное преобразование $\mathrm{id}_\Delta \to P$. Оно получается формальным добавлением начального объекта $0'$ к каждому Δ^n и потом отождествлением $\{0' < 1 < \cdots < n\}$ с Δ^{n+1}. Итак, $P(s_i) = s_{i+1}$ и $P(d_i) = d_{i+1}$. Если A — симплициальный объект в $\mathcal{A}$, *пространство путей* PA — это симплициальный объект, полученный как композиция A с P. Поэтому $PA_n = A_{n+1}$ и i-й оператор грани для PA — это ∂_{i+1} для A, и i-й оператор вырождения для PA — это σ_{i+1} для A. Более того, отображения $\partial_0 : A_{n+1} \to A_n$ образуют симплициальное отображение $PA \to A$.

Будем писать A_0 для постоянного симплициального объекта в A_0. Естественные отображения $\sigma_0^{n+1} : A_0 \to A_{n+1}$ образуют симплициальное отображение $\iota : A_0 \to PA$, и отображения $A_{n+1} \to A_0$, индуцированные каноническим включением $\Delta^0 = \{0\}$ в Δ^{n+1}, образуют симплициальное отображение $\rho : PA \to A_0$ такое, что $\rho\iota$ тождественно на A_0. Хорошо известно, что $\iota\rho$ гомотопно единице на PA. Поэтому PA гомотопически эквивалентно A_0.

§5. Г-пространства

В этом параграфе используется машина Сегала [8], чтобы получить некоторую информацию о K-теории $K(\mathbf{B})$. Начнем с определений.

Если T — конечное множество, через $\mathcal{P}(T)$ обозначим множество всех подмножеств T, а множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ будем обозначать через $\mathbf{n}$.

Определение. I. Γ — это категория, чьи объекты суть конечные множества и чьи морфизмы из S в T суть отображения $\theta : S \to \mathcal{P}(T)$ такие, что $\theta(\alpha)$ и $\theta(\beta)$ дизъюнктны, когда $\alpha \neq \beta$. Композиция $\theta : S \to \mathcal{P}(T)$ и $\varphi : T \to \mathcal{P}(U)$ — это $\psi : S \to \mathcal{P}(U)$, где $\psi(\alpha) = \bigcup_{\beta \in \theta(\alpha)} \varphi(\beta)$.

II. Γ-пространство — это контравариантный функтор $A : \Gamma \to (\mathit{Spaces})$ такой, что

(a) $A(\mathbf{0})$ стягиваемо и

(b) для любого n отображение $p_n : A(\mathbf{n}) \to A(\mathbf{1}) \times \overset{n}{\cdots} \times A(\mathbf{1})$, индуцированное отображениями $i_k : \mathbf{1} \to \mathbf{n}$ в Γ, $i_k(1) = \{k\} \subset \mathbf{n}$, — гомотопическая эквивалентность.

$A(\mathbf{1})$ будем называть *исходным пространством*.

Имеется ковариантный функтор $\Delta \to \Gamma$, переводящий Δ^m в $\mathbf{m}$ и $f : \Delta^m \to \Delta^n$ в $\theta(i) = \{j \in \mathbf{n} \mid f(i-1) < j \leqslant f(i)\}$. Посредством этого функтора можно рассматривать Γ-пространства как симплициальные пространства.

Сегал использует функтор реализации $A \to |A|$ для симплициальных пространств несколько отличный от обычного (см. [8, приложение A]). Если A — Γ-пространство, его реализация — это реализация симплициального пространства, которое оно определяет.

Определение. Если A — Γ-пространство, его классифицирующее пространство — это Γ-пространство BA такое, что для всякого конечного множества S, $BA(S)$ — реализация Γ-пространства $T \mapsto A(S \times T)$.

Если A — Γ-пространство, пространства $A(\mathbf{1}), BA(\mathbf{1}), B^2A(\mathbf{1}), \ldots$ образуют спектр, который мы обозначим через $\mathbf{B}A$. Соображение, по которому мы вводим Γ-пространства, — такое, что они естественно возникают из категорий.

Определение. Γ-*категория* — это контравариантный функтор $\mathcal{C}$ из Γ в категории такой, что

(a) $\mathcal{C}(\mathbf{0})$ эквивалентна категории с одним объектом и одним морфизмом;

(b) для любого n функтор $p_n : \mathcal{C}(\mathbf{n}) \to \mathcal{C}(\mathbf{1}) \times \overset{n}{\cdots} \times \mathcal{C}(\mathbf{1})$, индуцированный отображениями $i_k : \mathbf{1} \to \mathbf{n}$ в Γ, — эквивалентность категорий.

Если $\mathcal{C}$ — Γ-категория, $|\mathcal{C}|$ является Γ-пространством. Здесь $|\mathcal{C}|$ означает функтор $S \mapsto |\mathcal{C}(S)|$.

Γ-категории возникают следующим образом. Пусть $\mathcal{C}$ — категория с суммами и нуль-объектом 0. Если S — конечное множество, через $\mathcal{P}(S)$ обозначим категорию подмножеств S и их включений — это не должно приводить к разночтениям с прежним употреблением $\mathcal{P}(S)$. Пусть $\mathcal{C}(S)$ —

категория, чьи объекты суть функторы из $\mathcal{P}(S)$, которые переводят дизъюнктные объединения в суммы. Морфизмы из Γ были определены таким образом, что морфизмы $S \to T$ в Γ в точности соответствуют функторам из $\mathcal{P}(S)$ в $\mathcal{P}(T)$, сохраняющим дизъюнктные объеденения. Тогда категория $i\mathcal{C}(S)$ изоморфизмов в $\mathcal{C}(S)$ удовлетворяет определению, приведенному выше.

Приспосабливаясь к терминологии и обозначениям [9, часть 1.8], полученную симплициальную категорию обозначим через $N.\mathcal{C}$. По определению, $N_0\mathcal{C} = 0$ и $N_n\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbf{n})$ для $n \geqslant 1$. Симплициальную категорию $N.\mathcal{C}$ называем *нервом относительно закона композиции*. По построению, пространство $|i.N.\mathcal{C}|$ — это $B|i.\mathcal{C}|(\mathbf{1})$. Обозначим через $N.\mathbf{B}$ нерв относительно закона композиции ассоциированный с категорией $\mathbf{B}_0$.

Заметим, что всякий функтор $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, сохраняющий суммы, задает отображения бисимплициальных объектов $f^* : i.N.\mathcal{C} \to i.N.\mathcal{D}$. Если нам дана левая система диаграммных категорий или левый выделенный дериватор $\mathbf{B}$, мы можем построить мультисимплициальные категории $iN.^mS.^n\mathbf{B}$, $m, n \geqslant 0$, и пространства $|i.N.^mS.^n\mathbf{B}|$ путем итерации $N.$- и $S.$-конструкций.

Предложение 5.1. $|i.S.\mathbf{B}|$ — *канонически бесконечнократное пространство петель, а значит, и пространство K-теории $K(\mathbf{B})$.*

Доказательство. Приведенные выше рассуждения показывают, что $|i.S.\mathbf{B}|$ является исходным пространством Γ-пространства относительно закона композиции, полученного из копроизведения. •

Рассмотрим точный справа функтор $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ между левыми системами диаграммных категорий или левыми выделенными дериваторами соответственно. Обозначим через $N_n(\mathbf{A} \to \mathbf{B})$ расслоенное произведение диаграммы

$$N_n\mathbf{A} \xrightarrow{F} N_n\mathbf{B} \xleftarrow{\partial_0} (PN.\mathbf{B})_n = N_{n+1}\mathbf{B}.$$

Объект из $N_n(\mathbf{A} \to \mathbf{B})$ — это тройка (A, c, B), где $A \in N_n\mathbf{A}$, $B \in N_{n+1}\mathbf{B}$, $c : F(A) \to \partial_0(B)$ — изоморфизм в $N_n\mathbf{B}$. Получаем симплициальную категорию

$$N.(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) : \Delta^n \mapsto N_n(\mathbf{A} \to \mathbf{B}).$$

Для любого n существует функтор

$$g : \mathbf{B}_0 = N_1\mathbf{B} \to N_n(\mathbf{A} \to \mathbf{B}),$$

определенный как $B \mapsto (0, 1, v^*B)$, где $v : \Delta^{n+1} \to \Delta^1$, $i \mapsto 0$, если $i = 0$, и $i \mapsto 1$, в противном случае.

Рассматривая $\mathbf{B}_0$ как тривиальную симплициальную категорию, получим последовательность

$$\mathbf{B}_0 \xrightarrow{g} N.(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \xrightarrow{p} N.\mathbf{A},$$

в которой p — проекция. Она задает последовательность

$$i.S.\mathbf{B} \xrightarrow{g} i.N.S.(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \xrightarrow{p} i.N.S.\mathbf{A}, \qquad (8)$$

где $N.S.(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) = N.(S.\mathbf{A} \to S.\mathbf{B})$. Заметим, что пространство $|i.N.S.\mathbf{A}|$ — это $B|i.S.\mathbf{A}|(\mathbf{1})$, где $B|i.S.\mathbf{A}|$ — это Γ-пространство ассоциированное с $|i.S.\mathbf{A}|$.

Лемма 5.2. *Последовательность* (8) *является гомотопически расслоенной.*

Доказательство. По лемме 4.2 достаточно проверить, что для любого n последовательность $i.S.\mathbf{B} \longrightarrow i.N_nS.(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \longrightarrow i.N_nS.\mathbf{A}$ является гомотопически расслоенной, так как базовое пространство $i.N_nS.\mathbf{A} = i.\operatorname{Hom}(\mathcal{P}(\mathbf{n}), S.\mathbf{A}) \simeq (i.S.\mathbf{A})^n$ связно для любого n по лемме 3.3. Мы покажем, что эта последовательность — гомотопически то же самое, что и тривиальное расслоение ассоциированное с произведением $i.S.\mathbf{B} \times i.N_nS.\mathbf{A}$.

Пусть $u : \Delta^1 \to \Delta^{n+1}$ — морфизм $0;1 \mapsto 0;1$. Рассмотрим также морфизмы $d_0 : \Delta^n \to \Delta^{n+1}$ и $s_0 : \Delta^{n+1} \to \Delta^n$. Для каждого $B \in N_{n+1}\mathbf{B}$ построим следующую диаграмму:

$$B' = v^*u^*B \xrightarrow{\varphi} B \xleftarrow{\psi} B'' = s_0^*\partial_0 B.$$

Для каждого подмножества $S \subseteq [\mathbf{n}+\mathbf{1}]$

$$B'_S = \begin{cases} B_1, & 1 \in S, \\ 0, & 1 \notin S \end{cases}$$

и

$$B''_S = \begin{cases} B_{S \setminus \{1\}}, & 1 \in S, \\ B_S, & 1 \notin S, \end{cases}$$

откуда следуют определения φ и ψ. Заметим, что $B'_S \xrightarrow{\varphi_S} B_S \xleftarrow{\psi_S} B''_S$ принадлежит $N_2\mathbf{B}$.

Функтор $N_n(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to N_n\mathbf{A} \times \mathbf{B}_0$, $(A, c, B) \mapsto (A, B_{\{1\}})$ является эквивалентностью категорий. Квазиобратный функтор задается как

$$(A, B) \mapsto (A, 1, s_0^*FA \coprod v^*B).$$

Тогда индуцированное отображение $i.N_nS.(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to i.N_nS.\mathbf{A} \times i.S.\mathbf{B}$ — гомотопическая эквивалентность по лемме 4.1.

Эта гомотопическая эквивалентность вкладывается в следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
i.S.\mathbf{B} \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & i.N_nS.(\mathbf{A}\to\mathbf{B}) \arrow[r] \arrow[d] & i.N_nS.\mathbf{A} \arrow[d, "1"] \\
i.S.\mathbf{B} \arrow[r] & i.N_nS.\mathbf{A}\times i.S.\mathbf{B} \arrow[r] & i.N_nS.\mathbf{A}.
\end{tikzcd}$$

Будучи гомотопически эквивалентно тривиальному расслоению (нижняя строка диаграммы), заключаем, что верхняя последовательность является гомотопически расслоенной, что и требовалось доказать. •

Как и выше, можно построить последовательность

$$i.\mathbf{B}_0 \to P(i.N.\mathbf{B}) \to i.N.\mathbf{B}.$$

Композиция является постоянным отображением, и средняя компонента стягиваема, так что получаем отображение, корректно определенное с точностью до гомотопии,

$$|i.\mathbf{B}_0| \to \Omega|i.N.\mathbf{B}|.$$

Заменяя $\mathbf{B}$ симплициальной категорией $S.\mathbf{B}$, получаем последовательность

$$i.S.\mathbf{B} \to P(i.N.S.\mathbf{B}) \to i.N.S.\mathbf{B},$$

где „P“ относится к $N.$-направлению. По предыдущей лемме эта последовательность является гомотопически расслоенной. Тогда $|i.S.\mathbf{B}| \to \Omega|i.N.S.\mathbf{B}|$ — гомотопическая эквивалентность, и более общо поэтому ввиду леммы 4.1 отображение $|i.N.^nS.\mathbf{B}| \to \Omega|i.N.^{n+1}S.\mathbf{B}|$ также гомотопическая эквивалентность. Получаем спектр

$$n \mapsto |i.N.^nS.\mathbf{B}|,$$

который является Ω-спектром. Он не что иное, как спектр $n \mapsto B^n|i.S.\mathbf{B}|(\mathbf{1})$, полученный по машине Сегала.

Поскольку в последовательности

$$|i.S.\mathbf{B}| \to \Omega|i.N.S.\mathbf{B}| \to \Omega\Omega|i.N.N.S.\mathbf{B}| \to \cdots$$

все отображения — гомотопические эквивалентности, то также и отображение

$$|i.S.\mathbf{B}| \to \Omega^\infty|i.N.^\infty S.\mathbf{B}| = \lim_n \Omega^n|i.N.^nS.\mathbf{B}|.$$

Следствие 5.3. *Пусть* $\mathbf{A} \to \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *— последовательность точных справа морфизмов левых систем диаграммных категорий или левых выделенных дериваторов соответственно. Тогда квадрат*

$$\begin{array}{ccc} i.S.\mathbf{B} & \longrightarrow & i.N.S.(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ i.S.\mathbf{C} & \longrightarrow & i.N.S.(\mathbf{A} \to \mathbf{C}) \end{array}$$

является гомотопически декартовым.

Доказательство. Имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} i.S.\mathbf{B} & \longrightarrow & i.N.S.(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) & \longrightarrow & i.N.S.\mathbf{A} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ i.S.\mathbf{C} & \longrightarrow & i.N.S.(\mathbf{A} \to \mathbf{C}) & \longrightarrow & i.N.S.\mathbf{A}, \end{array}$$

в которой строки суть гомотопически расслоенные последовательности по лемме 5.2. Поэтому левый квадрат является гомотопически декартовым. •

Следствие 5.4. *Справедливы следующие два утверждения.*

(1) *С каждым точным справа морфизмом ассоциируется гомотопически расслоенная последовательность*

$$i.S.\mathbf{B} \to i.S.\mathbf{C} \to i.N.S.(\mathbf{B} \to \mathbf{C}).$$

(2) *Если* $\mathbf{C}$ *— ретракт* $\mathbf{B}$ (*по точным справа функторам*), *имеется расщепление*

$$i.S.\mathbf{B} \simeq i.S.\mathbf{C} \times i.N.S.(\mathbf{C} \to \mathbf{B}).$$

Доказательство. (1). Если $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, пространство $|i.N.S.(\mathbf{A} = \mathbf{A})|$ стягиваемо, откуда следует первое утверждение.

(2). Так как композиция $\mathbf{A} \to \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ тождественна, то $i.N.S.(\mathbf{A} \to \mathbf{C})$ стягиваемо, и тогда (2) следует из следствия 5.3. •

§6. Теорема аддитивности

Пусть $\mathbf{B}$ — либо левая система диаграммных категорий, либо левый выделенный дериватор и пусть $\mathbf{E}_0$ — полная подкатегория в $\mathbf{B}_\square$, состоящая из кодекартовых квадратов $B \in \mathbf{B}_\square$ таких, что $B_{(1,0)}$ изоморфен нулю. Если заменить $\mathbf{B}$ на $\mathbf{B}(I)$, определение категории $\mathbf{E}_I$ аналогично $\mathbf{E}_0$. Получаем левую систему диаграммных категорий либо левый выделенный дериватор $\mathbf{E}$ соответственно.

Лемма 6.1. *Морфизм* $l : \Delta^1 \to \square$, $i \mapsto (0,i)$, *индуцирует эквивалентность категорий* $l^* : \mathbf{E}_0 \to \mathbf{B}_{\Delta^1}$, *а также точную справа эквивалентность* $\mathbf{E} \to \mathbf{B}(\Delta^1)$.

Доказательство. Морфизм l факторизуется как $\Delta^1 \xrightarrow{g} \ulcorner \xrightarrow{h} \square$. Доказательство предложения 3.1 показывает, что $l^* : \mathbf{E}_0 \to \mathbf{B}_{\Delta^1}$ — эквивалентность (для левых выделенных дериваторов следует использовать тот факт, что g — открытая иммерсия). Ясно, что индуцированный морфизм $\mathbf{E} \to \mathbf{B}(\Delta^1)$ — эквивалентность. Он точен справа по предложениям 1.8 и 2.4. $\bullet$

Следствие 6.2. *Морфизм* $f : \square \to \operatorname{Ar}\Delta^2$, $(i,j) \mapsto (i,j+1)$, *индуцирует эквивалентность категорий* $f^* : S_2\mathbf{B} \to \mathbf{E}_0$, *а также точную справа эквивалентность* $\mathbf{S}_2\mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{E}$.

Доказательство. Пусть $\ell : \Delta^1 \to \operatorname{Ar}\Delta^2$ — морфизм $i \mapsto (0,i+1)$. Он факторизуется как $\Delta^1 \xrightarrow{l} \square \xrightarrow{f} \operatorname{Ar}\Delta^2$, где l — морфизм леммы 6.1. По предложению 3.1 $\ell^* = l^* f^* : \mathbf{S}_2\mathbf{B} \to \mathbf{B}_{\Delta^1}$ — эквивалентность. По лемме 6.1 l^* — эквивалентность, а значит, и f^*. $\bullet$

Лемма 6.3. *Пусть* $\mathbf{B}$ *— либо левая система диаграммных категорий, либо левый выделенный дериватор, и пусть* $B \in \mathbf{B}_\square$ *— кодекартов квадрат такой, что морфизм* $B_{(0,0)} \to B_{(0,1)}$ (*соответственно морфизм* $B_{(0,0)} \to B_{(1,0)}$) *— изоморфизм. Тогда* $B_{(1,0)} \to B_{(1,1)}$ (*соответственно* $B_{(0,1)} \to B_{(1,1)}$) *— также изоморфизм. С другой стороны, квадрат, у которого две параллельные стрелки — изоморфизмы, является кодекартовым.*

Доказательство. Пусть морфизм $B_{(0,0)} \to B_{(0,1)}$ — изоморфизм. Рассмотрим функтор $q : \square \to \Delta^1$, $(\varepsilon,\eta) \mapsto \varepsilon$, и пусть $i : \Delta^1 \to \square$ — функтор $\varkappa \mapsto (\varkappa,0)$. Тогда i сопряжен слева к q, значит, $i_! \simeq q^*$. Морфизм i факторизуется как

$$\Delta^1 \xrightarrow{l} \ulcorner \xrightarrow{i_\ulcorner} \square,$$

$l(\varkappa) = (\varkappa,0)$. По предложениям 1.9 и 2.5 объект $i_! i^* B \simeq i_{\ulcorner !}(l_! i^* B)$ кодекартов.

Пусть $\beta : (i_! i^* B \simeq) q^* i^* B \to B$ — морфизм сопряженности. Тогда $\beta_{(0,0)} = \beta_{(1,0)} = 1$, $\beta_{(0,1)}$ — изоморфизм по предположению и $i_\ulcorner^* \beta$ — изоморфизм.

Рассмотрим коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} i_{\ulcorner !} i_{\ulcorner}^* i_! i^* B \arrow[r, "i_{\ulcorner !} i_{\ulcorner}^* \beta"] \arrow[d] & i_{\ulcorner !} i_{\ulcorner}^* B \arrow[d] \\ i_! i^* B \arrow[r, "\beta"] & B. \end{tikzcd}$$

Верхняя стрелка — изоморфизм. Вертикальные стрелки — также изоморфизмы, так как B и $i_! i^* B$ кодекартовы. Тогда β — также изоморфизм, а значит, и $B_{(1,0)} \to B_{(1,1)} \simeq \beta_{(1,1)}$ — изоморфизм. Соответствующее утверждение, когда $B_{(0,0)} \to B_{(1,0)}$ — изоморфизм, выводится из первого применением автоэквивалентности $\tau : \square \to \square$, переставляющей вершины $(1,0)$ и $(0,1)$.

С другой стороны, если $B_{(0,0)} \to B_{(0,1)}$ и $B_{(1,0)} \to B_{(1,1)}$ — изоморфизмы, то $\beta : i_! i^* B \to B$ — изоморфизм. Так как $i_! i^* B$ кодекартов, то B также кодекартов. $\bullet$

Мы хотим построить функтор $\alpha : \mathbf{B}_0 \to \mathbf{E}_0$, переводящий объект $A \in \mathbf{B}_0$ в объект из $\mathbf{E}_0$, и который изображается в $\mathbf{B}_0$ как квадрат

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Пусть $s_0 : \Delta^1 \to 0$ — единственный функтор. Допустим сперва, что $\mathbf{B}$ — левая система диаграммных категорий и $d : \square^\star \to \Delta^{1\star}$ — морфизм $(0,i) \mapsto i$, $(1,i) \mapsto \star$. Полагаем тогда $\alpha = d^* s_0^*$. Если $\mathbf{B}$ — левый выделенный дериватор, пусть $l : \Delta^1 \to \square$ — морфизм $i \mapsto (0,i)$. Тогда l — открытая иммерсия, а значит, существует правый сопряженный к l^* функтор l_*. В этом случае $\alpha = l_* s_0^*$.

Пусть $j : \square \to \Delta^1$ — морфизм $(\varepsilon, \eta) \mapsto \eta$. Тогда j^* переводит $B \in \mathbf{B}_{\Delta^1}$ в квадрат из $\mathbf{B}_\square$, который изображается в $\mathbf{B}_0$ как

$$\begin{tikzcd} B_0 \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & B_1 \arrow[d, "1"] \\ B_0 \arrow[r] & B_1. \end{tikzcd}$$

Пусть $\mathbf{B}$ — левая система диаграммных категорий и пусть $u : \Delta^{1\star} \to 0^\star$ — морфизм $0 \mapsto \star$, $1 \mapsto 0$. Тогда u^* переводит объект $B \in \mathbf{B}_0$ в объект из $\mathbf{B}_{\Delta^1}$, имеющий $u^* B_0 = 0$ и $u^* B_1 = B$. Полагаем $\beta = j^* u^*$. В свою очередь, если $\mathbf{B}$ — левый выделенный дериватор, рассмотрим морфизм $v : 0 \to \Delta^1$,

$v(0) = 1$. Тогда $v_!B_0 = 0$ и $v_!B_1 = B$ для любого $B \in \mathbf{B}_0$. В этом случае $\beta := j^*v_!$.

β переводит объект $B \in \mathbf{B}_0$ в квадрат

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, "1"] \\ 0 \arrow[r] & B. \end{tikzcd}$$

Пусть $\mathbf{B}$ — либо левая система диаграммных категорий, либо левый выделенный дериватор, $\mathbf{B}'$ и $\mathbf{B}''$ — либо две левые подсистемы диаграммных категорий, либо два левых выделенных поддериватора соответственно такие, что морфизмы включения точны справа. Имеется три естественных точных справа морфизма $s, t, q : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$, переводящие объект $E \in \mathbf{E}_?$ в $E_{(0,0)}$, $E_{(0,1)}$ и $E_{(1,1)}$ соответственно. Определим предсистему диаграммных категорий либо предериватор $\mathbf{E}(\mathbf{B}', \mathbf{B}, \mathbf{B}'') = \{E \in \mathbf{E} \mid E_{(0,0)} \in \mathbf{B}', E_{(1,1)} \in \mathbf{B}''\}$. Тогда $\mathbf{E}(\mathbf{B}', \mathbf{B}, \mathbf{B}'')$ — левая система диаграммных категорий, либо левый выделенный дериватор соответственно, ибо $\mathbf{E}(\mathbf{B}', \mathbf{B}, \mathbf{B}'')$ эвивалентна расслоенному произведению диаграммы $\mathbf{E} \xrightarrow{(s,q)} \mathbf{B} \times \mathbf{B} \longleftarrow \mathbf{B}' \times \mathbf{B}''$. Заметим, что $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{B})$.

Чтобы получить унитарную, ассоциативную структуру H-пространства для $|i.S.\mathbf{B}|$, индуцированную копроизведением $\coprod$ посредством отображения

$$|i.S.\mathbf{B}| \times |i.S.\mathbf{B}| \xrightarrow{\sim} |i.S.\mathbf{B} \times i.S.\mathbf{B}| \xrightarrow{\coprod} |i.S.\mathbf{B}|,$$

мы должны иметь хороший выбор для $A \coprod B$, $A, B \in S_n\mathbf{B}$, такой, что $f^*(A \coprod B) = f^*(A) \coprod f^*(B)$, где $f : \Delta^m \to \Delta^n$ — структурный морфизм в Δ (мы всегда имеем изоморфизм между ними, так как f^* сохраняет копроизведения по лемме 3.2). Мы бы имели затем симплициальную эквивалентность $\coprod(\coprod \times 1) \simeq \coprod(1 \times \coprod)$

$$\begin{tikzcd} i.S.\mathbf{B} \times i.S.\mathbf{B} \times i.S.\mathbf{B} \arrow[rr, "\coprod \times 1"] \arrow[dd, "1\times\coprod"'] & & i.S.\mathbf{B} \times i.S.\mathbf{B} \arrow[d, "\coprod"] \\ & & i.S.\mathbf{B} \arrow[dl, Rightarrow, "\alpha"] \\ i.S.\mathbf{B} \times i.S.\mathbf{B} \arrow[r, "\coprod"'] & i.S.\mathbf{B}, & \end{tikzcd}$$

которая индуцирует гомотопию между ними, переходя к реализации. Также следовало бы, что два отображения $i.S.\mathbf{B} \to i.S.\mathbf{B}$, $B \mapsto B \coprod 0$ и $B \mapsto 0 \coprod B$, гомотопны единице, и тогда $|i.S.\mathbf{B}|$ унитарно. По-видимому, у нас нет достаточно данных в общем случае для такого выбора копроизведений. Эту ситуацию будем называть *патологической*. Этот термин обусловлен тем наблюдением, что мы всегда имеем требуемый выбор на практике. В самом деле, все левые системы диаграммных категорий и левые выделенные дериваторы возникают на практике как гиперфунктор $I \mapsto \mathrm{Ho}\,\mathcal{C}^I$, в котором $\mathcal{C}$ замкнута относительно копроизведений. Тогда необходимый выбор производится в $\mathcal{C}$.

Обозначения. Всюду далее в этом параграфе предполагается, что $\mathbf{B}$ не является патологической.

Точная справа последовательность $F' \to F \to F''$ точных справа функторов $\mathbf{B}' \to \mathbf{B}$ — это точный справа функтор $G : \mathbf{B}' \to \mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{B})$ такой, что $F' = s \circ G$, $F = t \circ G$ и $F'' = q \circ G$.

Предложение 6.4 (эквивалентные формулировки теоремы аддитивности)**.** *Каждое из следующих условий влечет оставшиеся три.*

(1) *Проекция*

$$i.S.\mathbf{E}(\mathbf{B}', \mathbf{B}, \mathbf{B}'') \to i.S.\mathbf{B}' \times i.S.\mathbf{B}'', \quad E \mapsto (E_{(0,0)}, E_{(1,1)})$$

является гомотопической эквивалентностью.

(2) *Проекция*

$$i.S.\mathbf{E} \to i.S.\mathbf{B} \times i.S.\mathbf{B}, \quad E \mapsto (E_{(0,0)}, E_{(1,1)})$$

является гомотопической эквивалентностью.

(3) *Следующие два отображения гомотопны*:

$$i.S.\mathbf{E} \to i.S.\mathbf{B}, \quad E \mapsto E_{(0,1)}, \text{ соответственно } E \mapsto E_{(0,0)} \coprod E_{(1,1)}.$$

(4) *Если* $F' \to F \to F''$ *— точная справа последовательность точных справа функторов* $\mathbf{B}' \to \mathbf{B}$*, имеется гомотопия*

$$|i.S.F| \simeq |i.S.F'| \vee |i.S.F''|.$$

Доказательство. (2) — это специальный случай (1), (3) — специальный случай (4), и (4) следует из (3) естественным образом.

Итак, достаточно показать (2) $\Longrightarrow$ (3) и (4) $\Longrightarrow$ (1).

(2) $\Longrightarrow$ (3). Искомая гомотопия $|i.S.t| \simeq |i.S.(s \vee q)|$ получается из ограничения вдоль отображения

$$|i.S.\mathbf{B}| \times |i.S.\mathbf{B}| \longrightarrow |i.S.\mathbf{E}|, \quad (A, B) \mapsto \alpha A \coprod \beta B.$$

Поэтому достаточно показать, что это отображение является гомотопической эквивалентностью. Но оно сечение отображения (2), а значит, является гомотопической эквивалентностью, если таковым является (2).

(4) $\Longrightarrow$ (1). Рассмотрим сначала морфизмы $l : \Delta^1 \to \Box$, $\varkappa \mapsto (\varkappa, 0)$, и $q : \Box \to \Delta^1$, $(\varepsilon, \eta) \mapsto \varepsilon$. Обозначим через $\mathbf{E}'_? = \{q^* l^* E \mid E \in \mathbf{E}(\mathbf{B}', \mathbf{B}, \mathbf{B}'')_?\}$. Если $E \in \mathbf{E}(\mathbf{B}', \mathbf{B}, \mathbf{B}'')_0$, объект $q^* l^* E$ изображается в $\mathbf{B}_0$ как

$$\begin{array}{ccc} E_{(0,0)} & \xrightarrow{1} & E_{(0,0)} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ O & \xrightarrow{1} & O, \end{array}$$

где $O = E_{(1,0)}$ — нуль-объект.

Также пусть $i : \Delta^1 \to \Box$, $\varkappa \mapsto (1, \varkappa)$ и $j : \Box \to \Delta^1$, $(\varepsilon, \eta) \mapsto \eta$. Обозначим через $\mathbf{E}''_? = \{j^* i^* E \mid E \in \mathbf{E}(\mathbf{B}', \mathbf{B}, \mathbf{B}'')_?\}$. Если $E \in \mathbf{E}(\mathbf{B}', \mathbf{B}, \mathbf{B}'')_0$, объект $j^* i^* E$ изображается в $\mathbf{B}_0$ как

$$\begin{array}{ccc} O & \longrightarrow & E_{(1,1)} \\ {\scriptstyle 1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle 1} \\ O & \longrightarrow & E_{(1,1)}. \end{array}$$

Мы построим такой точный справа морфизм

$$E \in \mathbf{E}(\mathbf{B}', \mathbf{B}, \mathbf{B}'')_? \mapsto E^2 \in \mathbf{E}(\mathbf{E}', \mathbf{E}, \mathbf{E}'')_?,$$

что E^2 изображается в $\mathbf{E}_0$ следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ O & \longrightarrow & E''. \end{array}$$

Пренебрегая объектом $(1, 0) \in \Box$, E^2 изображается в $\mathbf{B}_0$ как

$$\begin{array}{ccccc} E_{(0,0)} & \xrightarrow{1} & E_{(0,0)} & \longrightarrow & O \\ {\scriptstyle 1}\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ E_{(0,0)} & \longrightarrow & E_{(0,1)} & \longrightarrow & E_{(1,1)} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle 1} \\ O & \longrightarrow & E_{(1,1)} & \longrightarrow & E_{(1,1)}. \end{array}$$

Тогда из нашего предположения будет следовать, что

$$i.S.\mathbf{E}(\mathbf{B}', \mathbf{B}, \mathbf{B}'') \to i.S.\mathbf{E}' \times i.S.\mathbf{E}'', \quad E \mapsto (q^* l^* E, j^* i^* E)$$

— гомотопическая эквивалентность с сечением $(E', E'') \mapsto E' \coprod E''$. Построим E^2 следующим образом. Рассмотрим два морфизма $\varphi, \psi : \Box \to \Delta^1$, определенные по правилам

$$(0,0),(0,1),(1,0) \overset{\varphi}{\mapsto} 0, \quad (1,1) \overset{\varphi}{\mapsto} 1$$

и

$$(0,0) \overset{\psi}{\mapsto} 0, \quad (0,1),(1,0),(1,1) \overset{\psi}{\mapsto} 1.$$

Функторы φ^* и ψ^* переводят каждый $A \in \mathbf{B}_{\Delta^1}$ в квадраты, изображенные в $\mathbf{B}_0$ как

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & A_0 \arrow[d] \\
A_0 \arrow[r] & A_1
\end{tikzcd}$$

и

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[d, "1"] \\
A_1 \arrow[r, "1"'] & A_1
\end{tikzcd}$$

соответственно.

Объект $E \in \mathbf{E}(\mathbf{B}', \mathbf{B}, \mathbf{B}'')_0$ может быть рассмотрен как объект в $\mathbf{B}(\Delta^1)_{\Delta^1}$, который принимает значения $E_{(0,0)} \to O$ в 0 и $E_{(0,1)} \to E_{(1,1)}$ в 1. Вложим E в кодекартов квадрат $E^1 = (1_{\Delta^1} \times \varphi)^* E$ в $\mathbf{B}(\Delta^1)_{\square}$. Изображая E^1 подходящим образом, получим следующую диаграмму в $\mathbf{B}_0$:

$$\begin{tikzcd}
& E_{(0,0)} \arrow[rr] \arrow[dd] & & O \arrow[dd] \\
E_{(0,0)} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & O \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
& E_{(0,1)} \arrow[rr, dashed] & & E_{(1,1)} \\
E_{(0,0)} \arrow[ur] \arrow[rr] & & O. \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

E^1 может быть рассмотрен как объект в $\mathbf{B}(\square)_{\Delta^1}$, который принимает значения левого квадрата в изображенном кубе в 0 и правого квадрата в 1. Вложим E^1 в кодекартов квадрат $E^2 = (\psi \times 1_{\square})^* E^1$ в $\mathbf{B}(\square)_{\square}$. Построение E^2 завершено. Тогда $E \in \mathbf{E}(\mathbf{B}', \mathbf{B}, \mathbf{B}'')_? \mapsto E^2 \in \mathbf{E}(\mathbf{E}', \mathbf{E}, \mathbf{E}'')_?$ индуцирован $(\psi \times 1_{\square})^*(1_{\Delta^1} \times \varphi)^*$.

Остается показать, что отображения $f : E \in \mathbf{E}'_? \mapsto E_{(0,0)} \in \mathbf{B}_?$ и $g : E \in \mathbf{E}''_? \mapsto E_{(1,1)} \in \mathbf{B}_?$ индуцируют гомотопическую эквивалентность

$$i.S.\mathbf{E}' \times i.S.\mathbf{E}'' \xrightarrow{(f,g)} i.S.\mathbf{B}' \times i.S.\mathbf{B}'',$$

так как $p : i.S.\mathbf{E}(\mathbf{B}', \mathbf{B}, \mathbf{B}'') \to i.S.\mathbf{B}' \times i.S.\mathbf{B}''$, $E \mapsto (E_{(0,0)}, E_{(1,1)})$, — это композиция

$$i.S.\mathbf{E}(\mathbf{B}', \mathbf{B}, \mathbf{B}'') \xrightarrow{(q^*l^*, j^*i^*)} i.S.\mathbf{E}' \times i.S.\mathbf{E}'' \xrightarrow{(f,g)} i.S.\mathbf{B}' \times i.S.\mathbf{B}'',$$

и левая стрелка — гомотопическая эквивалентность (см. выше).

Пусть $\bar{\mathbf{B}}_? = \{X \in \mathbf{B}_{\Delta^1 \times ?} \mid X_1 \simeq 0\}$. Тогда $\bar{\mathbf{B}}$ и $\mathbf{E}'$ изоморфны, так как $l^*q^* = 1_{\bar{\mathbf{B}}}$ и $q^*l^*q^*l^*|_{\mathbf{E}'} = 1_{\mathbf{E}'}$. Аналогично пусть $\bar{\bar{\mathbf{B}}}_? = \{X \in \mathbf{B}_{\Delta^1 \times ?} \mid X_0 \simeq 0\}$. Тогда $\bar{\bar{\mathbf{B}}}$ и $\mathbf{E}''$ изоморфны, так как $i^*j^* = 1_{\bar{\bar{\mathbf{B}}}}$ и $j^*i^*j^*i^*|_{\mathbf{E}''} = 1_{\mathbf{E}''}$.

Наконец, доказательство предложения 3.1 показывает, что морфизм $\bar{\mathbf{B}} \to \mathbf{B}'$, индуцированный морфизмом $0 \mapsto 0 \in \Delta^1$, — эквивалентность, так же как и морфизм $\bar{\bar{\mathbf{B}}} \to \mathbf{B}''$, индуцированный морфизмом $0 \mapsto 1 \in \Delta^1$. Доказательство завершено. $\bullet$

Пусть X — симплициальный объект и $PX \to X$ — проекция, индуцированная морфизмом грани $\partial_0 : X_{n+1} \to X_n$. Если рассмотреть X_1 как симплициальный объект, имеется включение $X_1 \to PX$, приводящее к последовательности $X_1 \to PX \to X$.

В частности, получаем последовательность $i.S_1\mathbf{B} \to P(i.S.\mathbf{B}) \to i.S.\mathbf{B}$, которая ввиду эквивалентности $i.S_1\mathbf{B}$ и $i.\mathbf{B}_0$ может быть записана как

$$i.\mathbf{B}_0 \xrightarrow{G} P(i.S.\mathbf{B}) \xrightarrow{\partial_0} i.S.\mathbf{B}.$$

Покажем явно, как устроен G. Пусть $\ell^* : S_1\mathbf{B} \to \mathbf{B}_0$ — эквивалентность из предложения 3.1. Квазиобратный к ℓ^* строится следующим образом. Рассмотрим открытую иммерсию $e : 0 \mapsto 0 \in \Delta^1$. Если $\mathbf{B}$ — левая система диаграммных категорий и $k : \Delta^1 \to 0$ — морфизм $0; 1 \mapsto 0; \star$, то $(k^*B)_0 = B$ и $(k^*B)_1 = 0$ для любого $B \in \mathbf{B}_0$. В свою очередь, если $\mathbf{B}$ — левый выделенный дериватор, то $(e_*B)_0 = B$ и $(e_*B)_1 = 0$.

Далее, пусть $p : \Delta^1 \to \operatorname{Ar}\Delta^1$ — замкнутая иммерсия $i \mapsto (i, 1)$, $r : \operatorname{Ar}\Delta^{1\star} \to \Delta^{1\star}$, — морфизм $(0,0) \mapsto \star, (0; 1, 1) \mapsto 0; 1$, и $B \in \mathbf{B}_0$. Если $\mathbf{B}$ — левая система диаграммных категорий, то $(r^*k^*B)_{(0,0)} = (r^*k^*B)_{(1,1)} = 0$ и $(r^*k^*B)_{(0,1)} = B$. Положим $g = r^*k^*$. Если $\mathbf{B}$ — левый выделенный дериватор, то $(p_!e_*B)_{(0,0)} = (p_!e_*B)_{(1,1)} = 0$ и $(p_!e_*B)_{(0,1)} = B$. В этом случае $g := p_!e_*$.

Рассмотрим также морфизм $v : \Delta^{n+1} \to \Delta^1$, $0 \mapsto 0$ и $i \mapsto 1$ для $i \geqslant 1$. Положим $G = v^*g : \mathbf{B}_0 \to S_{n+1}\mathbf{B}$. Тогда „значения“ GB в каждом $(i,j) \in \operatorname{Ar}\Delta^{n+1}$ суть $GB_{(i,j)} = 0$, если $(i,j) = (0,0)$ и $i \geqslant 1$, и $GB_{(0,j)} = B$ для $j \geqslant 1$. Рассматривая $\mathbf{B}_0$ как тривиальную симплициальную категорию, получаем отображения $G : \mathbf{B}_0 \to PS.\mathbf{B}$ и $G : |i.\mathbf{B}_0| \to |P(i.S.\mathbf{B})|$.

Композиция $|i.\mathbf{B}_0| \xrightarrow{G} |P(i.S.\mathbf{B})| \to |i.S.\mathbf{B}|$ является постоянным отображением, и $|P(i.S.\mathbf{B})|$ стягиваемо, так как гомотопически эквивалентно стягиваемому пространству $|i.S_0\mathbf{B}|$. Поэтому получаем отображение, корректно определенное с точностью до гомотопии,

$$|i.\mathbf{B}_0| \to \Omega|i.S.\mathbf{B}|.$$

Мы приведем пару полезных наблюдений, принадлежащих Вальдхаузену [9, с. 332].

Наблюдение. Следующие две композиции гомотопны:

$$|i.\mathbf{E}_0| \underset{s\vee q}{\overset{t}{\rightrightarrows}} |i.\mathbf{B}_0| \longrightarrow \Omega|i.S.\mathbf{B}|.$$

Доказательство. Посмотрим на 2-скелет $|i.S.\mathbf{B}|_{(2)}$ для $|i.S.\mathbf{B}|$ в $S.$-направлении. Мы можем отождествить $i\mathbf{B}_0$ с $iS_1\mathbf{B}$ и $i\mathbf{E}_0$ с $iS_2\mathbf{B}$.

Отображения грани из $i.S_2\mathbf{B}$ в $i.S_1\mathbf{B}$ соответствуют трем отображениям s, t, q соответственно, каждое из которых представлено в диаграмме

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[rr, "A_{0,2}"] \arrow[dr, "A_{0,1}"'] & & 2 \\ & 1. \arrow[ur, "A_{1,2}"'] & \end{tikzcd}$$

Рассмотрим каноническое отображение $|i.S_2\mathbf{B}| \times |\Delta^2| \to |i.S.\mathbf{B}|_{(2)}$. Рассматривая 2-симплекс $|\Delta^2|$ как гомотопию из ребра $(0,2)$ в ребро пути $(0,1)(1,2)$, получим гомотопию из jt

$$|i.\mathbf{E}_0| \xrightarrow{t} |i.\mathbf{B}_0| \xrightarrow{j} \Omega|i.S.\mathbf{B}|_{(2)}$$

в произведение петель двух композиций js и jq. Но в H-пространстве $\Omega|i.S.\mathbf{B}|$ произведение петель гомотопно закону композиции, откуда следует наше наблюдение. $\bullet$

Те же рассуждения влекут более общо такое

Наблюдение. Для любого $n \geqslant 0$ две композиции гомотопны

$$|i.S.^n\mathbf{E}| \underset{s\vee q}{\overset{t}{\rightrightarrows}} |i.S.^n\mathbf{B}| \longrightarrow \Omega|i.S.^{n+1}\mathbf{B}|.$$

Теорема 6.5. *Теорема аддитивности справедлива* (*т.е. выполнено любое из равносильных условий предложения* (6.4)), *если определение K-теории как $\Omega|i.S.\mathbf{B}|$ заменить на $\Omega^\infty|i.S.^\infty\mathbf{B}| = \lim_n \Omega^n|i.S.^n\mathbf{B}|$.*

Доказательство. Для начала заметим, что предложение 6.4 является формальным в том смысле, что оно также применимо к новому определению K-теории. По предыдущему наблюдению две композиции гомотопны

$$\Omega^\infty|i.S.^\infty\mathbf{E}| \underset{s\vee q}{\overset{t}{\rightrightarrows}} \Omega^\infty|i.S.^\infty\mathbf{B}| \longrightarrow \Omega^\infty|i.S.^\infty\mathbf{B}|.$$

Поскольку стрелка справа — изоморфизм, это одно из эквивалентных условий теоремы аддитивности (см. предложение 6.4). •

Замечание. Как следствие из теоремы, мы могли бы добавить еще одну формулировку теоремы аддитивности к списку предложения 6.4 (см. также теорему 6.6). А именно теорема аддитивности, как она там сформулирована, влечет, что отображения $|i.S.^n\mathbf{B}| \to \Omega|i.S.^{n+1}\mathbf{B}|$ — гомотопические эквивалентности для $n \geqslant 1$. Обратно, если эти отображения — гомотопические эквивалентности, то также и $\Omega|i.S.\mathbf{B}| \to \Omega^\infty|i.S.^\infty\mathbf{B}|$. Поэтому теорема аддитивности следует из предыдущей теоремы.

Пусть $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ — точный справа функтор двух левых систем диаграммных категорий или левых выделенных дериваторов. Обозначим через $\mathbf{S}.(F : \mathbf{A} \to \mathbf{B})$ расслоенное произведение диаграммы

$$\mathbf{S}.\mathbf{A} \xrightarrow{F} \mathbf{S}.\mathbf{B} \xleftarrow{\partial_0} P\mathbf{S}.\mathbf{B},$$

где $\partial_0 = d_0^*$, $d_0 : \Delta^n \to \Delta^{n+1}$. По предложению 1.3 $\mathbf{S}.(F : \mathbf{A} \to \mathbf{B})$ — симплициальная левая система диаграммных категорий или симплициальный левый выделенный дериватор. Поэтому имеем коммутативный квадрат для каждого n

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S}_n(F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}) & \xrightarrow{F'} & (P\mathbf{S}.\mathbf{B})_n = \mathbf{S}_{n+1}\mathbf{B} \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \partial_0} \\ \mathbf{S}_n\mathbf{A} & \xrightarrow{F} & \mathbf{S}_n\mathbf{B}. \end{array}$$

По построению мы можем отождествить объект из $\mathbf{S}_n(F : \mathbf{A} \to \mathbf{B})_?$ с тройкой (A, c, B), в которой $A \in \mathbf{S}_n\mathbf{A}_?$, $B \in \mathbf{S}_{n+1}\mathbf{B}_?$ и $FA \overset{c}{\simeq} \partial_0 B$ — изоморфизм. Заметим, что все морфизмы в диаграмме точны справа.

Пусть $G : \mathbf{B} \to \mathbf{S}_{n+1}\mathbf{B}$ — морфизм, построенный выше. Тогда $\partial_0 GB = 0$, и G факторизуется как $F' \circ G'$, где $G' : \mathbf{B} \to \mathbf{S}_n(F : \mathbf{A} \to \mathbf{B})$, $B \overset{G'}{\mapsto} (0, 1, GB)$.

Рассматривая $\mathbf{B}$ как тривиальный симплициальный объект, получим последовательность

$$\mathbf{B} \xrightarrow{G'} \mathbf{S}.(F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}) \xrightarrow{p} \mathbf{S}.\mathbf{A}, \tag{9}$$

в которой композиция тривиальна, а также последовательность, полученную из (9),

$$i.S.\mathbf{B} \longrightarrow i.S.S.(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \longrightarrow i.S.S.\mathbf{A}.$$

Аналогично имеется последовательность

$$i.S.\mathbf{B} \to P(i.S.S.\mathbf{B}) \to i.S.S.\mathbf{B},$$

где „P“ относится, скажем, к первому $S.$-направлению.

Теорема 6.6. *Эквивалентны следующие утверждения*:

(1) *выполнена теорема аддитивности* (*см. предложение* (6.4));

(2) *последовательность*

$$i.S.\mathbf{B} \longrightarrow i.S.S.(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \longrightarrow i.S.S.\mathbf{A}$$

является гомотопически расслоенной;

(3) *последовательность*

$$i.S.\mathbf{B} \to P(i.S.S.\mathbf{B}) \to i.S.S.\mathbf{B}$$

является гомотопически расслоенной;

(4) *отображение* $|i.S.^n\mathbf{B}| \to \Omega|i.S.^{n+1}\mathbf{B}|$ *является гомотопической эквивалентностью для любого* $n \geqslant 1$.

Если выполнены эквивалентные условия (1)–(4)*, то спектр* $n \mapsto i.S.^n\mathbf{B}$*, у которого структурные отображения определены так же, как и* $|i.\mathbf{B}_0| \to \Omega|i.S.\mathbf{B}|$ (*см. выше*), *является* Ω*-спектром, за исключением первой компоненты. Этот спектр является связным* (n*-я компонента* $(n-1)$*-связна*). *Следовательно,* K*-теория для* $\mathbf{B}$ *может быть эквивалентно определена как пространство*

$$\Omega^\infty|i.S.^\infty\mathbf{B}| = \lim_n \Omega^n|i.S.^n\mathbf{B}|.$$

Доказательство. (3) следует из (2). Так как $|P(i.S.S.\mathbf{B})|$ стягиваемо, из (3) следует, что $|i.S.\mathbf{B}| \to \Omega|i.S.S.\mathbf{B}|$ — гомотопическая эквивалентность, а также, более общо, что и $|i.S.^n\mathbf{B}| \to \Omega|i.S.^{n+1}\mathbf{B}|$, $n \geqslant 1$, — гомотопическая эквивалентность. Итак, (4) следует из (3). По второму наблюдению, следующему за предложением 6.4, гомотопны композиции

$$|i.S.\mathbf{E}| \underset{s\vee q}{\overset{t}{\rightrightarrows}} |i.S.\mathbf{B}| \longrightarrow \Omega|i.S.S.\mathbf{B}|.$$

Если правое отображение — гомотопическая эквивалентность, то t гомотопно $s \vee q$. Поэтому (4) влечет (1). Остается доказать (1) $\Longrightarrow$ (2).

По лемме 4.2 достаточно показать, что для всякого n последовательность $i.S.\mathbf{B} \longrightarrow i.S.S_n(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \longrightarrow i.S.S_n\mathbf{A}$ является гомотопически расслоенной, так как базовое пространство $i.S.S_n\mathbf{A}$ связно для любого n. Используя теорему аддитивности, мы покажем, что эта последовательность с точностью до гомотопии то же самое, что и тривиальное расслоение, ассоциированное с произведением $i.S.\mathbf{B} \times i.S.S_n\mathbf{A}$.

Рассмотрим $u : \Delta^1 \to \Delta^{n+1}$, $0;1 \mapsto 0;1$, и $v : \Delta^{n+1} \to \Delta^1$, $0 \mapsto 0$, $i \mapsto 1$, если $i \geqslant 1$. Тогда u сопряжен слева к v. Для простоты обозначений, соответствующие морфизмы $\mathrm{Ar}\,\Delta^1 \to \mathrm{Ar}\,\Delta^{n+1}$ и $\mathrm{Ar}\,\Delta^{n+1} \to \mathrm{Ar}\,\Delta^1$, индуцированные u и v, обозначим теми же символами. Пусть $\bar{\mathbf{B}} = \{v^*u^*B \mid B \in \mathbf{S}_{n+1}\mathbf{B}\}$; тогда $v^*u^*B_{(0,0)} = B_{(0,0)}$, $v^*u^*B_{(0,i)} = B_{(0,1)}$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n+1$ и $v^*u^*B_{(i,j)} = B_{(1,1)}$ для любого $i \geqslant 1$.

Пусть $\bar{\bar{\mathbf{B}}} = \{\sigma_0\partial_0 B \mid B \in \mathbf{S}_{n+1}\mathbf{B}\}$, где $\sigma_0 : \mathbf{S}_n\mathbf{B} \to \mathbf{S}_{n+1}\mathbf{B}$ — функтор, индуцированный $s_0 : \mathrm{Ar}\,\Delta^{n+1} \to \mathrm{Ar}\,\Delta^n$. Заметим, что σ_0 сопряжен справа к ∂_0.

Если $m : \Delta^1 \times \mathrm{Ar}\,\Delta^{n+1} \to \mathrm{Ar}\,\Delta^{n+1}$ — морфизм, переводящий $(0,(i,j))$ в $(uv(i), uv(j))$ и $(1,(i,j))$ в (i,j), то m^* переводит объект $B \in \mathbf{S}_{n+1}\mathbf{B}_?$ в объект из $\mathbf{S}_{n+1}\mathbf{B}_{\Delta^1\times ?}$, который изображается в $\mathbf{S}_{n+1}\mathbf{B}_?$ как морфизм сопряженности $v^*u^*B \to B$.

Далее, пусть $l : \Delta^1 \times \mathrm{Ar}\,\Delta^{n+1} \to \mathrm{Ar}\,\Delta^{n+1}$ — морфизм, переводящий $(0,(i,j))$ в (i,j) и $(1,(i,j))$ в $(d_0s_0(i), d_0s_0(j))$. Тогда l^* переводит объект $B \in \mathbf{S}_{n+1}\mathbf{B}_?$ в объект из $\mathbf{S}_{n+1}\mathbf{B}_{\Delta^1\times ?}$. Он принимает значения B в 0 и $\sigma_0\partial_0 B$ в 1, и изображается в $\mathbf{S}_{n+1}\mathbf{B}_?$ как морфизм сопряженности $\beta : B \to \sigma_0\partial_0 B$.

Ограничение точного справа морфизма $(1_{\Delta^1} \times m)^* l^* : \mathbf{B}(\mathrm{Ar}\,\Delta^{n+1}) \to \mathbf{B}(\square \times \Delta^{n+1})$ на $\mathbf{S}_{n+1}\mathbf{B}$ переводит объект $B \in \mathbf{S}_{n+1}\mathbf{B}_?$ в объект из $\mathbf{E}(\mathrm{Ar}\,\Delta^{n+1})_? \subset \mathbf{B}(\square\times \mathrm{Ar}\,\Delta^{n+1})_?$. Поэтому получаем точный справа функтор

$$T : \mathbf{S}_{n+1}\mathbf{B} \xrightarrow{l^*} \mathbf{S}_{n+1}\mathbf{B}(\Delta^1) \xrightarrow{(1_{\Delta^1}\times m)^*} \mathbf{E}(\mathrm{Ar}\,\Delta^{n+1})$$

такой, что $t \circ T$ — тождественный морфизм на $\mathbf{S}_{n+1}\mathbf{B}$, и для всякого $B \in \mathbf{S}_{n+1}\mathbf{B}$ имеем $s \circ T(B) \in \bar{\mathbf{B}}$ и $q \circ T(B) \in \bar{\bar{\mathbf{B}}}$. Тогда T принимает значения в $\mathbf{E}(\bar{\mathbf{B}}, \mathbf{S}_{n+1}\mathbf{B}, \bar{\bar{\mathbf{B}}})$ и на самом деле он функтор

$$T : \mathbf{S}_{n+1}\mathbf{B} \to \mathbf{E}(\bar{\mathbf{B}}, \mathbf{S}_{n+1}\mathbf{B}, \bar{\bar{\mathbf{B}}}).$$

Для иллюстрации приведенной выше процедуры рассмотрим $\mathbf{S}_{n+1}\mathbf{B}$ на некоторое время как „струны“ $\mathbf{B}(\Delta^n)$ посредством эквивалентности $\ell^* : \mathbf{S}_{n+1}\mathbf{B} \to \mathbf{B}(\Delta^n)$ из предложения 3.1. Пусть функция $\widetilde{m} : \Delta^1 \times \Delta^n \to \Delta^n$ определена как

$$(0,i) \mapsto 0, \quad (1,i) \mapsto i.$$

Тогда индуцированный точный справа морфизм $\widetilde{m}^* : \mathbf{B}(\Delta^n) \to \mathbf{B}(\Delta^1 \times \Delta^n)$ переводит объект $B \in \mathbf{B}(\Delta^n)_?$ в объект из $\mathbf{B}(\Delta^1 \times \Delta^n)_?$, изображенный в

$\mathbf{B}_?$ как

$$\begin{tikzcd}
B_0 \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & B_0 \arrow[r, "1"] \arrow[d, "b_1"] & \cdots \arrow[r, "1"] & B_0 \arrow[d, "b_n\cdots b_1"] \\
B_0 \arrow[r, "b_1"] & B_1 \arrow[r, "b_2"] & \cdots \arrow[r, "b_n"] & B_n.
\end{tikzcd}$$

Пусть $k:\Delta^1\times\Delta^n\to\operatorname{Ar}\Delta^{n+1}$ — морфизм $(i,j)\mapsto(i,j+1)$, $\alpha_j:\square\to\Delta^1\times\Delta^n$ — морфизм, переводящий $(0;1,0)$ в $(0;1,j)$ и $(0;1,1)$ в $(0;1,j+1)$. Пусть $\mathbf{S}'_{n+1}\mathbf{B}$ — левая подсистема диаграммных категорий или левый выделенный поддериватор в $\mathbf{B}(\Delta^1\times\Delta^n)$ таких объектов B, что все квадраты α_j^*B, $j\leqslant n$, являются кодекартовыми, и $B_{(1,0)}=O$ — нуль-объект. Тогда легко показать, что морфизмы ограничения $k^*:\mathbf{S}_{n+1}\mathbf{B}\to\mathbf{S}'_{n+1}\mathbf{B}$ и $w^*:\mathbf{S}'_{n+1}\mathbf{B}\to\mathbf{B}(\Delta^n)$, где $w:\Delta^n\to\Delta^1\times\Delta^n$, $j\mapsto(0,j)$, — эквивалентности.

Ограничение морфизма $(1_{\Delta^1}\times\widetilde{m})^*:\mathbf{B}(\Delta^1\times\Delta^n)\to\mathbf{B}(\square\times\Delta^n)$ на $\mathbf{S}'_n\mathbf{B}$ переводит объект $B\in\mathbf{S}'_n\mathbf{B}_?$ в объект из $\mathbf{B}(\square\times\Delta^n)_?$, изображенный в $\mathbf{B}_?$ как

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& B_{(0,0)} \arrow[rr] \arrow[dd] & & B_{(0,1)} \arrow[rr] \arrow[dd] & & B_{(0,2)} \arrow[rr] \arrow[dd] & & \cdots \arrow[rr] & & B_{(0,n)} \arrow[dd] \\
B_{(0,0)} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & B_{(0,0)} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & B_{(0,0)} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & \cdots \arrow[rr] & & B_{(0,0)} \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
& O \arrow[rr] & & B_{(1,1)} \arrow[rr] & & B_{(1,2)} \arrow[rr] & & \cdots \arrow[rr] & & B_{(1,n)} \\
O \arrow[ur] \arrow[rr] & & O \arrow[ur] \arrow[rr] & & O \arrow[ur] \arrow[rr] & & \cdots \arrow[rr] & & O. \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Задняя стенка диаграммы — это элемент $B\in\mathbf{S}'_n\mathbf{B}_?$, изображенный в $\mathbf{B}_?$. Мы получаем точный справа морфизм $\widetilde{T}=(1_{\Delta^1}\times\widetilde{m})^*\circ w^{*-1}:\mathbf{B}(\Delta^n)\to\mathbf{E}(\Delta^n)$, так как каждый поперечный x-й квадрат $B_{x,\square}$, $x\leqslant n$, кодекартов.

Вернемся теперь к морфизму T и поднимем его до $\mathbf{S}_n(\mathbf{A}\to\mathbf{B})$. А именно мы посылаем объект $(A,c,B)\in\mathbf{S}_n(\mathbf{A}\to\mathbf{B})_?$ в $(\partial_0T\sigma_0A,\partial_0T\sigma_0(c),TB)\in\mathbf{E}(\mathbf{S}_n(\mathbf{A}\to\mathbf{B}))_?$. Мы используем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}(\operatorname{Ar}\Delta^n) \arrow[r, "\sigma_0"] \arrow[d, "F"'] & \mathbf{A}(\operatorname{Ar}\Delta^{n+1}) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "F"'] & \mathbf{A}(\square\times\operatorname{Ar}\Delta^{n+1}) \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "F"] & \mathbf{A}(\square\times\operatorname{Ar}\Delta^n) \arrow[d, "F"] \\
\mathbf{B}(\operatorname{Ar}\Delta^n) \arrow[r, "\sigma_0"] & \mathbf{B}(\operatorname{Ar}\Delta^{n+1}) \arrow[r, "T"] & \mathbf{B}(\square\times\operatorname{Ar}\Delta^{n+1}) \arrow[r, "\partial_0"] & \mathbf{B}(\square\times\operatorname{Ar}\Delta^n),
\end{tikzcd}$$

чтобы показать, что $F\partial_0T\sigma_0A=\partial_0T\sigma_0FA$. Соотношение $\partial_0TB=\partial_0T\sigma_0\partial_0B$ очевидно.

Пусть $\mathbf{B}'=\{(\partial_0v^*u^*\sigma_0A,\partial_0v^*u^*\sigma_0(c),v^*u^*B)\mid(A,c,B)\in\mathbf{S}_n(\mathbf{A}\to\mathbf{B})\}$ и $\mathbf{B}''=\{(A,c,\sigma_0\partial_0B)\mid(A,c,B)\in\mathbf{S}_n(\mathbf{A}\to\mathbf{B})\}$.

Получаем точный справа функтор

$$T' : \mathbf{S}_n(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \mathbf{E}(\mathbf{B}', \mathbf{S}_n(\mathbf{A} \to \mathbf{B}), \mathbf{B}''),$$

где $s \circ T'$ переводит (A, c, B) в $(\partial_0 v^* u^* \sigma_0 A, \partial_0 v^* u^* \sigma_0(c), v^* u^* B)$, $t \circ T'$ тождественно, и $q \circ T'$ переводит (A, c, B) в $(A, c, \sigma_0 \partial_0 B)$. Таким образом, получаем точную справа последовательность $s \circ T' \to 1 \to q \circ T'$. По нашему предположению отображение $(s \circ T', q \circ T') : S.S_n(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to S.\mathbf{B}' \times S.\mathbf{B}''$ — гомотопическая эквивалентность, и гомотопически обратное отображение индуцировано копроизведением.

Ясно, что морфизм $\mathbf{B}' {\to} \mathbf{B}$, переводящий $(\partial_0 v^* u^* \sigma_0 A, \partial_0 v^* u^* \sigma_0(c), v^* u^* B)$ в $B_{(0,1)}$, — эквивалентность. Квазиобратным к нему является G'.

Покажем, что морфизм $\delta : \mathbf{S}_n \mathbf{A} \to \mathbf{B}''$, $A \mapsto (A, 1, \sigma_0 F A)$, является квазиобратным к ограничению p на $\mathbf{B}''$. Очевидно, δ унивалентен. Для $(A, c, B) \in \mathbf{B}''$ морфизм $(1, \sigma_0(c)) : (A, 1, \sigma_0 F A) \to (A, c, B)$ — изоморфизм. Следует также, что каждый морфизм $(a, b) : \delta A \to \delta A'$ в $\mathbf{B}''$ равен $(a, \sigma_0 F a)$, откуда δ является полным. Поэтому δ — эквивалентность.

Итак, отображение $i.S.\mathbf{B}' \times i.S.\mathbf{B}'' \to i.S.\mathbf{B} \times i.S.S_n \mathbf{A}$ — гомотопическая эквивалентность, а значит, и композиция

$$i.S.S_n(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to i.S.\mathbf{B}' \times i.S.\mathbf{B}'' \to i.S.\mathbf{B} \times i.S.S_n \mathbf{A}$$

— тоже гомотопическая эквивалентность. Эта гомотопическая эквивалентность вкладывается в следующий коммутативный квадрат:

$$\begin{tikzcd}
i.S.\mathbf{B} \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & i.S.S_n(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \arrow[r] \arrow[d] & i.S.S_n \mathbf{A} \arrow[d, "1"] \\
i.S.\mathbf{B} \arrow[r] & i.S.\mathbf{B} \times i.S.S_n \mathbf{A} \arrow[r] & i.S.S_n \mathbf{A}.
\end{tikzcd}$$

Верхняя строка гомотопически эквивалентна тривиальному расслоению (нижняя строка диаграммы). Следовательно, она является гомотопически расслоенной. •

Замечание. Пусть $\Im$ — класс левых систем диаграммных категорий либо левых выделенных дериваторов, удовлетворяющий следующим условиям:

(1) $\mathbf{B} \in \Im$ влечет $\mathbf{S}_n \mathbf{B} \in \Im$ для любого n;

(2) отображение $i.S.\mathbf{E} \xrightarrow{(s,q)} i.S.\mathbf{B} \times i.S.\mathbf{B}$ — гомотопическая эквивалентность для любого $\mathbf{B} \in \Im$.

Доказательство теоремы 6.6 тогда показывает, что спектр $n \mapsto i.S.^n \mathbf{B}$ является Ω-спектром, за исключением первой компоненты, а значит, K-теория каждого $\mathbf{B} \in \Im$ может быть тогда эквивалентно определена как пространство

$$\Omega^\infty |i.S.^\infty \mathbf{B}| = \lim_n \Omega^n |i.S.^n \mathbf{B}|.$$

Левый выделенный дериватор $\mathbf{D}$ с областью Ord называем *комплициальным*, если существует точная справа эквивалентность $F : \mathbf{D}\mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ для некоторой комплициальной бивальдхаузеновой категории $\mathcal{C}$ в смысле Томасона [19], которая замкнута относительно канонических гомотопически кодекартовых и декартовых квадратов. Говорим в этом случае, что $\mathbf{D}$ *представляется* $\mathcal{C}$. Эта эквивалентность индуцирует гомотопическую эквивалентность бисимплициальных множеств $F : i.S.\mathbf{D}\mathcal{C} \longrightarrow i.S.\mathbf{D}$.

Теорема 6.7 ([10]). *Класс комплициальных дериваторов удовлетворяет условиям замечания.*

Предложение 6.8. *В условиях теоремы* 6.6 *предположим, что* $\mathbf{A} \to \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *— последовательность точных справа морфизмов между левыми системами диаграммных категорий либо левыми выделенными дериваторами. Тогда*

$$\begin{array}{ccc} i.S.\mathbf{B} & \longrightarrow & i.S.S.(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ i.S.\mathbf{C} & \longrightarrow & i.S.S.(\mathbf{A} \to \mathbf{C}) \end{array}$$

является гомотопически декартовым квадратом.

Доказательство. Имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} i.S.\mathbf{B} & \longrightarrow & i.S.S.(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) & \longrightarrow & i.S.S.\mathbf{A} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \mathrm{id} \\ i.S.\mathbf{C} & \longrightarrow & i.S.S.(\mathbf{A} \to \mathbf{C}) & \longrightarrow & i.S.S.\mathbf{A}, \end{array}$$

в которой строки являются гомотопически расслоенными последовательностями по теореме 6.6. Поэтому левый квадрат гомотопически декартов. •

Следствие 6.9. *В условиях теоремы* 6.6 *выполнены следующие утверждения.*

(1) *С каждым точным справа морфизмом ассоциируется гомотопически расслоенная последовательность*

$$i.S.\mathbf{B} \to i.S.\mathbf{C} \to i.S.S.(\mathbf{B} \to \mathbf{C}).$$

(2) *Если* $\mathbf{C}$ *— ретракт* $\mathbf{B}$ (*по точным справа функторам*), *имеется расщепление*

$$i.S.\mathbf{B} \simeq i.S.\mathbf{C} \times i.S.S.(\mathbf{C} \to \mathbf{B}).$$

Доказательство. (1) Если $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, то пространство $|i.S.S.(\mathbf{A} = \mathbf{A})|$ стягиваемо, откуда следует первое утверждение.

(2) Это случай предложения 6.8, так как композиция $\mathbf{A} \to \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ — единичный морфизм, и тогда $i.S.S.(\mathbf{A} \to \mathbf{C})$ стягиваемо. •

§7. Теорема сравнения

Мы хотим сравнить K-теорию Квиллена $K(\mathcal{E})$ с K-теорией ассоциированного бидериватора $\mathbf{D}^b(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — точная категория.

Пусть $wC^b(\mathcal{E})$ — категория Вальдхаузена для квазиизоморфизмов в $C^b(\mathcal{E})$, в которой корасслоения — покомпонентно допустимые мономорфизмы. Имеется естественный функтор для каждого $I \in \mathrm{Dirf}$

$$\mathrm{Ho} : C^b(\mathcal{E}^I) \to D^b(\mathcal{E}^I).$$

Образ относительно функтора Ho любого кодекартового в $C^b(\mathcal{E})^\square = C^b(\mathcal{E}^\square)$ квадрата

$$\begin{array}{ccc} * & \longrightarrow & * \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ * & \longrightarrow & *, \end{array}$$

где горизонтальные стрелки — корасслоения, является кодекартовым квадратом в $\mathbf{D}^b(\mathcal{E})_\square$ (это утверждение двойственно к [16, 3.14]). Поэтому Ho индуцирует отображение бисимплициальных множеств $\nu : w.S.C^b(\mathcal{E}) \to i.S.\mathbf{D}^b(\mathcal{E})$. Рассмотрим отображение

$$K(\tau) : K(\mathcal{E}) \to K(wC^b(\mathcal{E})),$$

индуцированное функтором τ, переводящий объект из $\mathcal{E}$ в комплекс, сосредоточенный в нулевой степени ($K(wC^b(\mathcal{E}))$ означает K-теорию Вальдхаузена для $wC^b(\mathcal{E})$).

Первая гипотеза Малциниотиса [7]**.** *Отображение* $K(\rho) = K(\nu\tau) : K(\mathcal{E}) \to K(\mathbf{D}^b(\mathcal{E}))$ *является гомотопической эквивалентностью.*

Гомоморфизм $K_0(\mathcal{E}) \to K_0(\mathbf{D}^b(\mathcal{E}))$ — изоморфизм, так как группы Гротендика $K_0(\mathcal{E})$ и $K_0(D^b(\mathcal{E}))$ естественно изоморфны (упражнение!), и $K_0(\mathbf{D}^b(\mathcal{E}))$ естественно изоморфна $K_0(D^b(\mathcal{E}))$ по лемме 3.5.

Первая гипотеза Малциниотиса очень трудна в общем случае. Однако можно получить некоторую информацию для широкого класса точных категорий, включающего абелевы категории. Следующее утверждение показывает, что K-теория $K(\mathcal{E})$ точной категории $\mathcal{E}$ из этого класса — ретракт $K(\mathbf{D}^b(\mathcal{E}))$.

Теорема 7.1. *Пусть $\mathcal{E}$ — замкнутая относительно расширений, полная точная подкатегория абелевой категории $\mathcal{A}$, удовлетворяющая условиям теоремы о резольвенте. То есть*

(1) *если $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$ точна в $\mathcal{A}$ и $M, M'' \in \mathcal{E}$, то $M' \in \mathcal{E}$, и*

(2) *для всякого объекта $M \in \mathcal{A}$ имеется конечная резольвента $0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$, где $P_i \in \mathcal{E}$.*

Тогда естественное отображение $K(\rho) : K(\mathcal{E}) \to K(\mathbf{D}^b(\mathcal{E}))$ — гомотопически расщепляющееся включение, т.е. существует отображение $p : K(\mathbf{D}^b(\mathcal{E})) \to K(\mathcal{E})$ такое, что $p \circ K(\rho)$ гомотопно единице. В частности, каждая K-группа $K_n(\mathcal{E})$ — прямое слагаемое $K_n(\mathbf{D}^b(\mathcal{E}))$.

Мы отложим доказательство. Следует сказать, что оно существенно использует результаты Неемана [22] по K-теории триангулированных категорий.

В [24, 25] показано, что естественное отображение $K(\mathcal{C}) \to K(\mathbf{D}\mathcal{C})$ из K-теории Вальдхаузена в K-теорию его дериватора не может быть эквивалентностью в общем случае. Например, это так для K-теории Вальдхаузена пространств. Это не означает, однако, что K-группы $K_n(\mathcal{C})$ не могут быть перестроены из его дериватора и что это — контрпример к проблеме сравнения, сформулированной выше для точных категорий.

Если категория Вальдхаузена вкладывается в категорию корасслоенных объектов выделенной модельной категории, чья структура Вальдхаузена индуцирована объемлющей модельной структурой (см. точное определение в [25]), то будем называть ее *хорошей*. Хотя имеются „нехорошие“ категории Вальдхаузена (см. [25, пример 2.2]), на практике оказывается, что если нам дана категория Вальдхаузена, всегда существует хорошая вальдхаузенова модель, т.е. хорошая категория Вальдхаузена с таким же пространством K-теории с точностью до гомотопии. Любая хорошая категория Вальдхаузена является категорией Вальдхаузена корасслоенных объектов, а значит, ей можно сопоставить левый выделенный дериватор $\mathbf{D}\mathcal{C}$ по теореме 2.8. Следующая теорема является также следствием результата Сизинского и Тоэна [24, 2.16].

Теорема 7.2 (впервые сформулирована Тоэном [26])**.** *Если $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ — хорошие категории Вальдхаузена такие, что их ассоциированные дериваторы $\mathbf{D}\mathcal{C}$ и $\mathbf{D}\mathcal{C}'$ эквивалентны, то спектры K-теорий Вальдхаузена $K(\mathcal{C})$ и $K(\mathcal{C}')$ также эквивалентны.*

При некоторых дополнительных данных $\mathbf{B}$ кодирует структуру триангулированной категории для $\mathbf{B}_0$ [16, 5, 6, 7]. Эта структура канонически переносится на все категории $\mathbf{B}_I$, $I \in \mathrm{Dia}$. В этом случае $\mathbf{B}$ называется *системой триангулированных диаграммных категорий* или *триангулированным дериватором* соответственно. Следующий результат показывает, что такой $\mathbf{B}$ содержит строго больше информации, нежели его триангулированная категория $\mathbf{B}_0$.

Предложение 7.3. *Существуют неэквивалентные триангулированные дериваторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}'$, чьи ассоциированные триангулированные категории $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{B}'_0$ эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{C} = m\mathcal{M}(\mathbf{Z}/p^2)$ и $\mathcal{C}' = m\mathcal{M}(\mathbf{Z}/p[\varepsilon]/\varepsilon^2)$ — две стабильные модельные категории, рассмотренные в [27]. Здесь $\mathcal{M}(\mathbf{Z}/p^2)$ и $\mathcal{M}(\mathbf{Z}/p[\varepsilon]/\varepsilon^2)$ — соответствующие категории конечно-порожденных модулей. Так как $\mathbf{Z}/p^2$ и $\mathbf{Z}/p[\varepsilon]/\varepsilon^2$ — квазифробениусовы кольца, $\mathcal{M}(\mathbf{Z}/p^2)$ и $\mathcal{M}(\mathbf{Z}/p[\varepsilon]/\varepsilon^2)$ — фробениусовы категории, а $\mathbf{D}\mathcal{C}$ и $\mathbf{D}\mathcal{C}'$ — триангулированные дериваторы по [16, 4.19]. Из [27, 1.4] следует, что $\mathbf{D}\mathcal{C}_0$ и $\mathbf{D}\mathcal{C}'_0$ эквивалентны как триангулированные категории. Но дериваторы $\mathbf{D}\mathcal{C}$ и $\mathbf{D}\mathcal{C}'$ не могут быть эквивалентными по теореме 7.2, так как K-теории Вальдхаузена $K(\mathcal{C})$ и $K(\mathcal{C}')$ не эквивалентны по [27, 1.7]. •

Другая проблема в нашем контексте (см. также [7, предположение 2]) — это теорема локализации. Рассмотрим семейство морфизмов $\mathcal{W} = \{\mathcal{W}_I \subseteq \operatorname{Mor}\mathbf{B}_I \mid I \in \mathrm{Dia}\}$ согласованных со структурными функторами f^* и $f_!$, т.е. $f^*(\mathcal{W}_J) \subseteq \mathcal{W}_I$ и $f_!(\mathcal{W}_I) \subseteq \mathcal{W}_J$ для любого $f : I \to J$. Пусть $\mathbf{B}_?[\mathcal{W}_?^{-1}]$ — категория частных, полученная путем обращения стрелок из $\mathcal{W}_?$. Требуется также выполнение следующих условий: морфизм принадлежит $\mathcal{W}_?$, если его образ в $\mathbf{B}_?[\mathcal{W}_?^{-1}]$ — изоморфизм. Пусть гиперфунктор $I \overset{Q}{\mapsto} \mathbf{B}_I[\mathcal{W}_I^{-1}]$ определяет левую систему диаграммных категорий или левый выделенный дериватор соответственно. Обозначим его через $\mathbf{B}[\mathcal{W}^{-1}]$. Допустим также, что функтор локализации $Q : \mathbf{B} \to \mathbf{B}[\mathcal{W}^{-1}]$ точен справа.

Если $\mathbf{B}$ — система триангулированных диаграммных категорий или триангулированный дериватор соответственно, то каждая толстая подкатегория $\mathbf{A}_0$ в $\mathbf{B}_0$ порождает локализацию в $\mathbf{B}$. А именно для $I \in \mathrm{Dia}$ положим $\mathbf{A}_I = \{A \in \mathbf{B}_I \mid A_x \in \mathbf{A}_0 \text{ для всех } x \in I\}$. Тогда $\mathbf{A}_I$ является толстой в $\mathbf{B}_I$, и функтор $I \mapsto \mathbf{A}_I$ определяет систему триангулированных диаграммных категорий или триангулированный дериватор соответственно, и затем функтор локализации строится естественным образом (см. [5, с. 39]).

Вторая гипотеза Малциниотиса [7]**.** *Если нам дана последовательность морфизмов левых систем диаграммных категорий или левых выделенных дериваторов соответственно*

$$\mathbf{A} \xrightarrow{F} \mathbf{B} \xrightarrow{Q} \mathbf{B}[\mathcal{W}^{-1}],$$

где Q — функтор локализации, а F — точная справа эквивалентность между $\mathbf{A}$ и $Q^{-1}(0) = \{B \in \mathbf{B}_? \mid 0 \to B \in \mathcal{W}_?\}$, то индуцированная последовательность пространств K-теории

$$K(\mathbf{A}) \longrightarrow K(\mathbf{B}) \longrightarrow K(\mathbf{B}[\mathcal{W}^{-1}])$$

является гомотопически расслоенной.

Мы уже сопоставили морфизму F гомотопически расслоенную последовательность (см. следствие 5.4(1))

$$i.S.\mathbf{A} \to i.S.\mathbf{B} \to i.N.S.(\mathbf{A} \to \mathbf{B}).$$

Имеется естественное отображение из $i.N.S.(\mathbf{A} \to \mathbf{B})$ в $i.S.\mathbf{B}[\mathcal{W}^{-1}]$. Поэтому теорема локализации сводится, скажем, к доказательству того, что последнее отображение — гомотопическая эквивалентность.

Остается доказать, как обещано, теорему 7.1. Мы начнем с определений.

Определение. Аддитивную категорию $\mathcal{T}$ будем называть *категорией с квадратами*, если

- ◇ $\mathcal{T}$ обладает автоморфизмом $\Sigma : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$;
- ◇ $\mathcal{T}$ наделена семейством *специальных квадратов*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] & D \arrow[dl, bend left=60, "(1)"] \\ A \arrow[u] \arrow[r] & B \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Это означает, что квадрат коммутативен в $\mathcal{T}$ и существует морфизм $D \to \Sigma A$, изображенный как изогнутая стрелка. Метка (1) говорит о том, что этот морфизм степени 1, т.е. морфизм $D \to \Sigma A$.

Специальный функтор категорий с квадратами $F : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ — это функтор такой, что существует естественный изоморфизм $\Sigma F \simeq F\Sigma$ и F переводит специальные квадраты в $\mathcal{S}$ в специальные квадраты в $\mathcal{T}$.

Если $\mathcal{T}$ — категория с квадратами, под *сверткой квадрата*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\delta"] & D \arrow[dl, bend left=60, "\mu"] \\ A \arrow[u, "\beta"] \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[u, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

понимается последовательность

$$A \xrightarrow{(\alpha,-\beta)^t} B \oplus C \xrightarrow{(\gamma,\delta)} D \xrightarrow{\mu} \Sigma A.$$

Примеры. Пусть $\mathcal{T}$ — триангулированная категория. Тогда $\mathcal{T}$ аддитивна и имеет автоморфизм Σ. Объявляем квадрат специальным, если его свертка — выделенный треугольник в $\mathcal{T}$. Если мы рассматриваем триангулированную категорию $\mathcal{T}$ как категорию с квадратами, определенную выше, будем обозначать ее через $\mathcal{T}^d$.

Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория, $Gr^b\mathcal{A}$ — категория ограниченных градуированных объектов в $\mathcal{A}$. Напомним, что градуированный объект из $\mathcal{A}$ — это последовательность объектов $\{A_i \in \mathcal{A}\}_{i\in\mathbf{Z}}$. Последовательность $\{A_i\}$ ограничена, если $A_i = 0$, кроме конечного числа $i \in \mathbf{Z}$.

Пусть $\Sigma : Gr^b\mathcal{A} \to Gr^b\mathcal{A}$ — функтор сдвига, т.е. $\Sigma\{A_i\} = \{B_i\}$, $B_i = A_{i+1}$. Квадрат в $Gr^b\mathcal{A}$ объявляем специальным, если свертка

$$A \xrightarrow{(\alpha,-\beta)^t} B \oplus C \xrightarrow{(\gamma,\delta)} D \xrightarrow{\mu} \Sigma A$$

задает длинную точную последовательность в $\mathcal{A}$

$$\cdots \to D_{i-1} \to A_i \to B_i \oplus C_i \to D_i \to A_{i+1} \to \cdots$$

Если $H : D^b(\mathcal{A}) \to Gr^b\mathcal{A}$ — функтор гомологий, переводящий комплекс $A \in D^b(\mathcal{A})$ в $\{H_i(A)\}$, он индуцирует функтор между категориями с квадратами

$$H : D^b(\mathcal{A})^d \to Gr^b\mathcal{A}.$$

Определение. (1) Пусть $\mathcal{T}$ — категория с квадратами и пусть $m, n \geqslant 0$. Функтор $X : \Delta^m \times \Delta^n \to \mathcal{T}$ назовем *аугментированной диаграммой*, если для любых $0 \leqslant i \leqslant i' \leqslant m$ и $0 \leqslant j \leqslant j' \leqslant n$ нам дан специальный квадрат

$$\begin{tikzcd}
X_{ij'} \arrow[r] & X_{i'j'} \arrow[dl, bend left=60, "\delta_{i,j}^{i',j'}"] \\
X_{ij} \arrow[u] \arrow[r] & X_{i'j} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

такой, что $\delta_{i,j}^{i',j'}$ — это композиция $X_{i'j'} \to X_{mn} \xrightarrow{\delta_{0,0}^{m,n}} \Sigma X_{00} \to \Sigma X_{ij}$. *Морфизмом* двух аугментированных диаграмм $\varphi : X \to Y$ называем естественное преобразование функторов такое, что квадрат

$$\begin{tikzcd}
X_{i'j'} \arrow[r, "\delta_{i,j}^{i',j'}"] \arrow[d, "\varphi_{i'j'}"'] & \Sigma X_{ij} \arrow[d, "\Sigma\varphi_{ij}"] \\
Y_{i'j'} \arrow[r, "\delta_{i,j}^{i',j'}"] & \Sigma Y_{ij}
\end{tikzcd}$$

коммутативен для любых $0 \leqslant i \leqslant i' \leqslant m$ и $0 \leqslant j \leqslant j' \leqslant n$.

Категорию аугментированных диаграмм обозначим через $Q_{m,n}\mathcal{T}$. Получаем бисимплициальную категорию $Q\mathcal{T} = \{Q_{m,n}\mathcal{T}\}_{m,n\geqslant 0}$ (операторы грани/вырождения определяются вычеркиванием/вставкой строки или столбца).

(2) K-теория $K(\mathcal{T})$ категории с квадратами $\mathcal{T}$ определяется как пространство $\Omega|\operatorname{Ob}(Q\mathcal{T})|$.

Пусть $H : D^b(\mathcal{A})^d \to Gr^b\mathcal{A}$ — функтор категорий с квадратами, построенный выше. Мы имеем морфизм бисимплициальных категорий $\chi : QD^b(\mathcal{A})^d \to QGr^b\mathcal{A}$, индуцированный H, а значит, и отображение $K(\chi) : K(D^b(\mathcal{A})) \to K(Gr^b\mathcal{A})$.

Если $\mathcal{E}$ — точная категория, и $m, n \geqslant 0$, обозначим через $Q_{m,n}\mathcal{E}$ такую категорию. Ее объекты суть функторы $X : \Delta^m \times \Delta^n \to \mathcal{E}$ такие, что для всяких $0 \leqslant i \leqslant i' \leqslant m$ и $0 \leqslant j \leqslant j' \leqslant n$ нам дан бидекартов квадрат

$$\begin{tikzcd} X_{ij'} \arrow[r, tail] & X_{i'j'} \\ X_{ij} \arrow[u, two heads] \arrow[r, tail] & X_{i'j}, \arrow[u, two heads] \end{tikzcd}$$

где вертикальные стрелки — эпиморфизмы, а горизонтальные стрелки — мономорфизмы. Морфизмы определены естественными преобразованиями. Полученную бисимплициальную категорию обозначим через $Q\mathcal{E}$. Хорошо известно, что симплициальная модель для распетливания $K(\mathcal{E})$ задается реализацией бисимплициального множества $\operatorname{Ob} Q\mathcal{E}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория, $i : \mathcal{A} \to D^b(\mathcal{A})$ — естественный функтор, переводящий $A \in \mathcal{A}$ в комплекс, сосредоточенный в нулевой степени. Он индуцирует функтор бисимплициальных категорий $\iota : Q\mathcal{A} \to QD^b(\mathcal{A})^d$ (см. также рассуждения ниже). Заметим, что дифференциалы $\delta_{i,j}^{i',j'}$ в $QD^b(\mathcal{A})^d$ строятся канонически и единственны для диаграмм, приходящих из $Q\mathcal{A}$ (см. [23]).

Теорема 7.4 (Нееман [22]). *Пусть $\mathcal{A}$ — малая абелева категория. Тогда композиция*

$$\operatorname{Ob} Q\mathcal{A} \xrightarrow{\iota} \operatorname{Ob} QD^b(\mathcal{A})^d \xrightarrow{\chi} \operatorname{Ob} QGr^b(\mathcal{A})$$

является гомотопической эквивалентностью.

Как обычно, если $\mathcal{C}$ — категория, то $i\mathcal{C}$ означает ее максимальный группоид, а $i.\mathcal{C}$ — нерв в i-направлении.

Следствие 7.5. *Пусть $\mathcal{A}$ — малая абелева категория. Тогда композиция отображений трисимплициальных объектов*

$$i.Q\mathcal{A} \xrightarrow{\iota} i.QD^b(\mathcal{A})^d \xrightarrow{\chi} i.QGr^b(\mathcal{A})$$

является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Для $k \geqslant 0$ категория $i_k\mathcal{A}$ струн изоморфизмов $A_0 \xrightarrow{\sim} \cdots \xrightarrow{\sim} A_k$ абелева, и композиция

$$i_kQ\mathcal{A} = Q[i_k\mathcal{A}] \xrightarrow{\iota} i_kQD^b(\mathcal{A})^d \xrightarrow{\chi} i_kQGr^b(\mathcal{A}) = QGr^b[i_k\mathcal{A}]$$

является гомотопической эквивалентностью бисимплициальных объектов по теореме 7.4, а по лемме 4.1 также и отображение следствия. $\bullet$

Доказательство теоремы 7.1. (1) Докажем сначала утверждение для абелевой категории $\mathcal{A}$. Для K-теории Квиллена $K(\mathcal{A})$ мы используем такую симплициальную модель. Она — пространство петель реализации $i.Q\mathcal{A}$ (см. [9]). В свою очередь, бисимплициальный максимальный группоид $iQ\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ является моделью для $K(\mathbf{D}^b(\mathcal{A}))$ (см. §3).

По следствию 7.5 достаточно показать, что отображение $i.Q\mathcal{A} \xrightarrow{\iota} i.QD^b(\mathcal{A})^d$ пропускается через $i.Q\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$. Напомним, что $Q_{m,n}\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$, $m, n \geqslant 0$, состоит из объектов $X \in \mathbf{D}^b(\mathcal{A})_{\Delta^m \times \Delta^n}$ таких, что для любых $0 \leqslant i \leqslant i' \leqslant m$ и $0 \leqslant j \leqslant j' \leqslant n$ квадрат

$$\begin{array}{ccc} X_{ij'} & \longrightarrow & X_{i'j'} \\ \uparrow & & \uparrow \\ X_{ij} & \longrightarrow & X_{i'j} \end{array}$$

бидекартов в $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})_\square$ (= кодекартов в триангулированном дериваторе [7]). Тогда

$$\operatorname{cone}(X_{ij} \to X_{ij'} \oplus X_{i'j}) \to \operatorname{cone}(0 \to X_{i'j'}) \simeq X_{i'j'}$$

— квазиизоморфизм в $C^b(\mathcal{A})$, а значит, изоморфизм в $D^b(\mathcal{A})$ (мы используем здесь свойства триангулированных дериваторов и информацию о триангулированной структуре, которую кодирует $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ [16, 5, 6]). Композиция обратного к этому изоморфизму с естественной проекцией

$$\operatorname{cone}(X_{ij} \to X_{ij'} \oplus X_{i'j}) \to \operatorname{cone}(X_{ij} \to 0) \simeq \Sigma X_{ij}$$

задает морфизм $\delta_{i,j}^{i',j'} : X_{i'j'} \to \Sigma X_{ij}$. Получаем специальный квадрат в $D^b(\mathcal{A})^d$.

Ясно, что эта конструкция естественна. Пусть $f : X \to Y$, где $X, Y \in Q_{m,n}\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$, — изоморфизм. Он представляется диаграммой $X \leftarrow Z \to Y$, где $Z \in Q_{m,n}\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$, и стрелки суть квазиизоморфизмы. Имеется коммутативная диаграмма в $C^b(\mathcal{A})$ для всяких $0 \leqslant i \leqslant i' \leqslant m$ и $0 \leqslant j \leqslant j' \leqslant n$:

$$\begin{tikzcd}
X_{ij} \arrow[r, "a"] & X_{ij'} \oplus X_{i'j} \arrow[r] & X_{i'j'} & \mathrm{cone}(a) \arrow[l] \arrow[r] & \Sigma X_{ij} \\
Z_{ij} \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "b"] & Z_{ij'} \oplus Z_{i'j} \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r] & Z_{i'j'} \arrow[u] \arrow[d] & \mathrm{cone}(b) \arrow[u] \arrow[d] \arrow[l] \arrow[r] & \Sigma Z_{ij} \arrow[u] \arrow[d] \\
Y_{ij} \arrow[r, "c"] & Y_{ij'} \oplus Y_{i'j} \arrow[r] & Y_{i'j'} & \mathrm{cone}(c) \arrow[l] \arrow[r] & \Sigma Y_{ij}.
\end{tikzcd}$$

Она определяет изоморфизм треугольников в $D^b(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd}
X_{ij} \arrow[r] \arrow[d] & X_{ij'} \oplus X_{i'j} \arrow[r] \arrow[d] & X_{i'j'} \arrow[r, "\delta_{i,j}^{i',j'}"] \arrow[d] & \Sigma X_{ij} \arrow[d] \\
Y_{ij} \arrow[r] & Y_{ij'} \oplus Y_{i'j} \arrow[r] & Y_{i'j'} \arrow[r, "\delta_{i,j}^{i',j'}"] & \Sigma Y_{ij}
\end{tikzcd}$$

и, значит, изоморфизм специальных квадратов в $D^b(\mathcal{A})^d$.

Пусть теперь $X \in Q_{m,n}\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$, $0 \leqslant i' \leqslant m$ и $0 \leqslant j' \leqslant n$. Имеется коммутативная диаграмма в $C^b(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd}
X_{00} \arrow[r] \arrow[d] & X_{i'0} \oplus X_{0j'} \arrow[r] \arrow[d] & X_{i'j'} \arrow[d] \\
X_{00} \arrow[r] & X_{m0} \oplus X_{0n} \arrow[r] & X_{mn},
\end{tikzcd}$$

и, значит, в $D^b(\mathcal{A})$ мы получим коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd}
X_{i'j'} \arrow[r, "\delta_{0,0}^{i',j'}"] \arrow[d] & \Sigma X_{00} \arrow[d] \\
X_{mn} \arrow[r, "\delta_{0,0}^{m,n}"] & \Sigma X_{00}.
\end{tikzcd}$$

Если $0 \leqslant i \leqslant i'$ и $0 \leqslant j \leqslant j'$, имеется коммутативная диаграмма в $C^b(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd}
X_{00} \arrow[r] \arrow[d] & X_{i'0} \oplus X_{0j'} \arrow[r] \arrow[d] & X_{i'j'} \arrow[d] \\
X_{ij} \arrow[r] & X_{i'j} \oplus X_{ij'} \arrow[r] & X_{i'j'},
\end{tikzcd}$$

и, значит, в $D^b(\mathcal{A})$ мы получим коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} X_{i'j'} \arrow[r, "\delta_{0,0}^{i',j'}"] \arrow[d] & \Sigma X_{00} \arrow[d] \\ X_{i'j'} \arrow[r, "\delta_{i,j}^{i',j'}"] & \Sigma X_{ij}, \end{tikzcd}$$

а „естественный“ морфизм $\delta_{i,j}^{i',j'} : X_{i'j'} \to \Sigma X_{ij}$ получается из $\delta_{0,0}^{m,n} : X_{mn} \to \Sigma X_{00}$ просто как композиция

$$X_{i'j'} \to X_{mn} \xrightarrow{\delta_{0,0}^{m,n}} \Sigma X_{00} \to \Sigma X_{ij}.$$

Поэтому функторы $\mathrm{dia} : \mathbf{D}^b(\mathcal{A})_{\Delta^m \times \Delta^n} \to \mathrm{Hom}(\Delta^m \times \Delta^n, D^b(\mathcal{A}))$, $m, n \geqslant 0$, индуцируют отображение бисимплициальных группоидов

$$\theta : iQ\mathbf{D}^b(\mathcal{A}) \to iQD^b(\mathcal{A})^d.$$

Ясно, что $i.Q\mathcal{A} \xrightarrow{\iota} i.QD^b(\mathcal{A})^d$ факторизуется как

$$i.Q\mathcal{A} \xrightarrow{\rho} i.Q\mathbf{D}^b(\mathcal{A}) \xrightarrow{\theta} i.QD^b(\mathcal{A})^d,$$

откуда следует наше утверждение.

(2) Допустим, что точная категория $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ удовлетворяет условиям теоремы. Рассмотрим коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} i.Q\mathcal{E} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & i.Q\mathbf{D}^b(\mathcal{E}) \arrow[d] & \\ i.Q\mathcal{A} \arrow[r, "\rho"] & i.Q\mathbf{D}^b(\mathcal{A}) \arrow[r, "\chi\theta"] & i.QGr^b\mathcal{A}, \end{tikzcd}$$

где вертикальные стрелки индуцированы включением $\mathcal{E} \to \mathcal{A}$. Левая вертикальная стрелка — гомотопическая эквивалентность по теореме о резольвенте [28]. То, что отображение $\chi\theta\rho$ — гомотопическая эквивалентность по (1), очевидно завершает доказательство. $\bullet$

Основываясь на вычислениях Вакнина [29], Нееман показывает [23, предложение 58], что существует точная категория $\mathcal{E}$ такая, что гомоморфизм $K_1(\iota) : K_1(\mathcal{E}) \to K_1(D^b(\mathcal{E}))$ не является мономорфизмом, тогда как он расщепляющийся мономорфизм для абелевых категорий [22, 23]. Простейший пример доставляет категория $\mathcal{E}$ свободных модулей конечного ранга над кольцом дуальных чисел $k[\varepsilon]/\varepsilon^2$. Такие точные категории могли бы обеспечить контрпримеры для первой гипотезы Малциниотиса, если бы мы показали аналогичным образом, что гомоморфизм $K_1(\rho) : K_1(\mathcal{E}) \to K_1(\mathbf{D}^b(\mathcal{E}))$ не является мономорфизмом.

Список литературы

[1] Grothendieck A., *Pursuing stacks*, Manuscript, 1983.

[2] Grothendieck A., *Les dérivateurs*, Manuscript, 1983–1990; `www.math.jussieu.fr/~maltsin/groth/Derivateurs.html`

[3] Heller A., *Homotopy theories*, Mem. Amer. Math. Soc. **71** (1988), no. 383, 78 pp.

[4] Keller B., *Derived categories and universal problems*, Comm. Algebra **19** (1991), no. 3, 699–747.

[5] Franke J., *Uniqueness theorems for certain triangulated categories with an Adams spectral sequence*, K-Theory Preprint Archives, no. 139, 1996.

[6] Maltsiniotis G., *Structure triangulée sur les catégories des coefficients d'un dérivateur triangulé*, Exposés au groupe de travail „Algèbre et topologie homotopiques", 2001.

[7] Maltsiniotis G., *La K-théorie d'un dérivateur triangulé*, Preprint, 2002; `www.math.jussieu.fr/~maltsin`

[8] Segal G., *Categories and cohomology theories*, Topology **13** (1974), 293–312.

[9] Waldhausen F., *Algebraic K-theory of spaces*, Algebraic and Geometric Topology (New Brunswick, NJ, 1983), Lecture Notes in Math., vol. 1126, Springer-Verlag, Berlin, 1985, pp. 318–419.

[10] Garkusha G., *Systems of diagram categories and K-theory*. II, Math. Z. **249** (2005), no. 3, 641–682.

[11] Cisinski D.-C., Neeman A., *Additivity for derivator K-theory*, Preprint, 2005; `www.math.univ-paris13.fr/~cisinski`.

[12] Маклейн С., *Категории для работающего математика*, Физматлит, 2004.

[13] Hovey M., *Model categories*, Math. Surveys Monogr., vol. 63, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[14] Cisinski D.-C., *Images directes cohomologiques dans les catégories de modèles*, Ann. Math. Blaise Pascal **10** (2003), no. 2, 195–244.

[15] Brown K. S., *Abstract homotopy theory and generalized sheaf cohomology*, Trans. Amer. Math. Soc. **186** (1974), 419–458.

[16] Cisinski D.-C., *Catégories dérivables*, Preprint, 2002; `www.math.univ-paris13.fr/~cisinski`

[17] Bousfield A. K., Friedlander E. M., *Homotopy theory of* Γ*-spaces, spectra, and bisimplicial sets*, Geometric Applications of Homotopy Theory (Proc. Conf., Evanston, IL, 1977), II, Lecture Notes in Math., vol. 658, Springer-Verlag, Berlin, 1978, pp. 80–130.

[18] Keller B., *Le dérivateur triangulé associé à une catégorie exacte*, Preprint, 2002.

[19] Thomason R. W., Trobaugh T., *Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories*, The Grothendieck Festschrift, Vol. III, Progr. Math., vol. 88, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 247–435.

[20] Cisinski D.-C., *An e-interchange*, January 2004.

[21] Waldhausen F., *Algebraic K-theory of generalized free products*, Ann. of Math. (2) **108** (1978), 135–204.

[22] Neeman A., *K-theory for triangulated categories* $3\frac{1}{2}$, A, B, K-Theory **20** (2000), 97–174; 243–298.

[23] Neeman A., *The K-theory of triangulated categories*, Handbook of K-Theory. Vol. 1, 2, Springer-Verlag, Berlin, 2005, pp. 1011–1080.

[24] Toën B., *Homotopical and higher categorical structures in algebraic geometry*, Habilitation thesis, Preprint math.AG/0312262.

[25] Toën B., Vezzosi G., *A remark on K-theory and S-categories*, Topology **43** (2004), no. 4, 765–791.

[26] Toën B., *Comparing S-categories and „dérivateurs de Grothendieck“*, Preprint, 2003; `math.unice.fr/ toen`.

[27] Schlichting M., *A note on K-theory and triangulated categories*, Invent. Math. **150** (2002), 111–116.

[28] Quillen D., *Higher algebraic K-theory*. I, Algebraic K-Theory I: Higher K-Theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), Lecture Notes in Math., vol. 341, Springer-Verlag, Berlin, 1973, pp. 85–147.

[29] Vaknin A., *Determinants in triangulated categories*, K-Theory **24** (2001), 57–68.

Department of Mathematics
The University of Manchester
Oxford Road, M13 9PL Manchester
UK
E-mail: `garkusha@imi.ras.ru`

Поступило 6 марта 2006 г.